Última actualización: 25 de marzo de 2022

Clase 14

En esta ocasión continuaremos nuestro estudio sobre las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Comenzaremos definiendo conjuntos relacionados con funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ para después definir conjuntos relacionados con funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Imagen inversa e Imagen directa

Definición 1 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos el* ***conjunto de nivel c de f****, denotado por $\boldsymbol{N_c(f)}$, como*

$$N_c(f) = \{\overline{x} \in A \mid f(\overline{x}) = c\}.$$

Observación 2 *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $N_c(f) \subseteq A$.*

Observación 3 *Note que, dados $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $N_c(f) \neq \varnothing \neq N_d(f)$, se tiene que*

$$N_c(f) \cap N_d(f) = \varnothing \iff c \neq d$$

Ejemplo 4 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Identifique $N_c(f)$ para cada $c \in \mathbb{R}$.*

Solución. Como $f(x, y) \geq 0$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene $N_c(f) = \varnothing$ para cada $c < 0$.

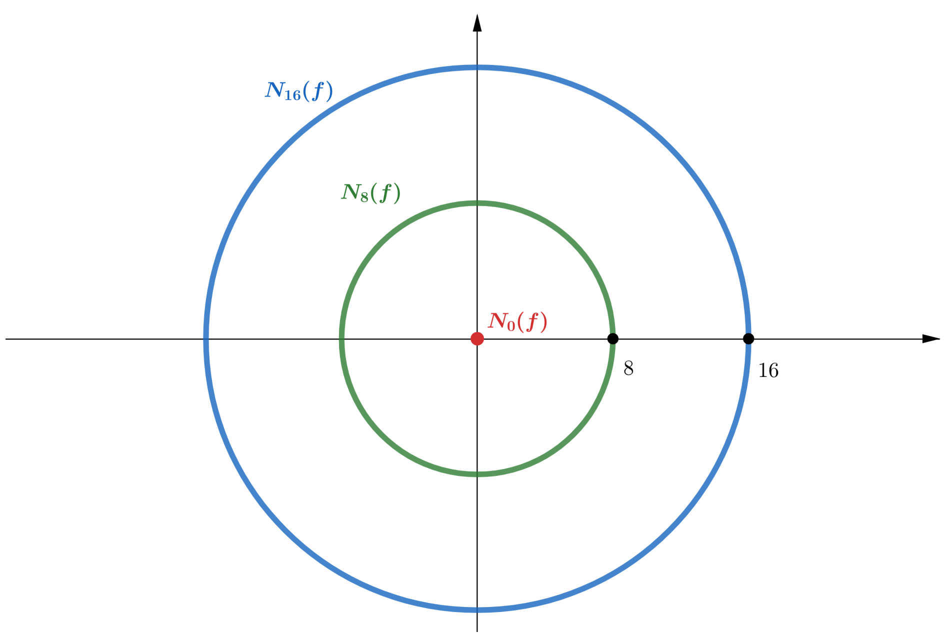


Figura 1: Los conjuntos de nivel son circunferencias

Ahora, si $c = 0$, entonces

$$\begin{aligned} N_c(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Finalmente, si $c > 0$, entonces $N_c(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = c\}$.

Note que en este ejemplo $N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, por lo que los conjuntos de nivel tienen una representación gráfica en $\mathbb{R}^2$, de hecho, con $c > 0$, son circunferencias de radio c vea figura 1. ∎

Ejemplo 5 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Identifique $N_c(f)$ para cada $c \in \mathbb{R}$.*

Solución. De manera similar que en el ejemplo anterior, $N_c(f) = \varnothing$ si $c < 0$ y, si $c \geq 0$, entonces los conjuntos de nivel c *son* circunferencias de radio $\sqrt{c}$. ∎

Ejemplo 6 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y, z) = x + y + z$. Identifique $N_c(f)$ para cada $c \in \mathbb{R}$.*

Solución. Se tiene que $N_c(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = c\}$, cuya representación geométrica es un plano con vector normal $(1, 1, 1)$, vea figura 2. ∎

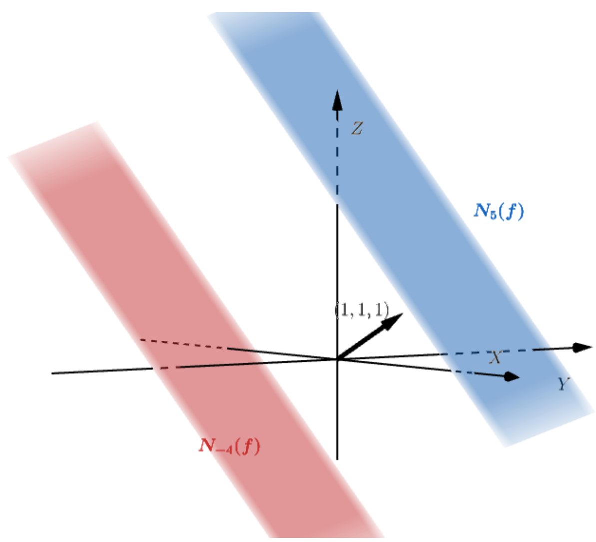


Figura 2: Los conjuntos de nivel *son* planos con vector normal $(1, 1, 1)$.

Los conjuntos de nivel son parte de una clase más general de conjuntos.

Definición 7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos **la imagen inversa de D bajo f**, que denotaremos por **$f^{-1}(D)$**, como*

$$f^{-1}(D) = \{\overline{x} \in A \mid f(\overline{x}) \in D\}.$$

Note que si $m = 1$ y $D = \{c\}$ entonces $N_c(f) = f^{-1}(\{c\})$.

Definición 8 *Sean $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Definimos* ***la imagen (directa) bajo f de B****, denotada por* $\boldsymbol{f(B)}$, *como*

$$\begin{aligned} f(B) &= \{f(\overline{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \overline{x} \in B\} \\ &= \{\overline{y} \in \mathbb{R}^m \mid \textit{existe } \overline{x} \in B \textit{ con } f(\overline{x}) = \overline{y}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 9 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Identifique $f([-\pi/2, \pi/2])$, $f([t_0, t_0 + 2\pi])$ y $f\left(\left\{t_0 + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$, donde $t_0 \in \mathbb{R}$ es fijo.*

Solución. Recuerde que, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$, así que los puntos de la forma $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ son puntos sobre la circunferencia unitaria, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Así, si $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, entonces $\cos(t) \in [0, 1]$ y $\operatorname{sen}(t) \in [-1, 1]$, por lo que

$$f([-\pi/2, \pi/2]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \text{ y } x \geq 0\}.$$

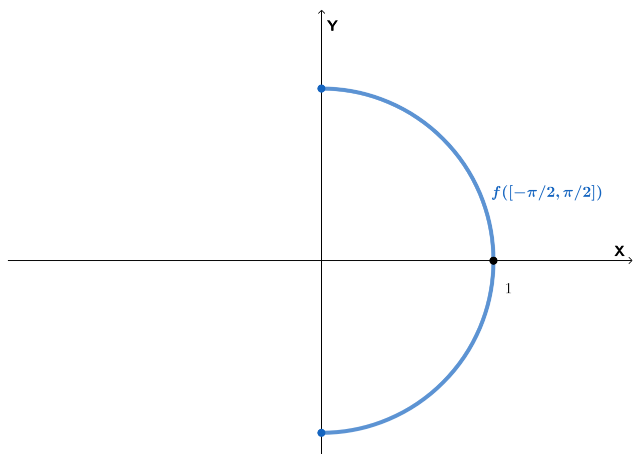


Figura 3: Se muestra $f([-\pi/2, \pi/2])$.

Ahora, como cos y sen son funciones periódicas de periodo 2π y justo la "longitud" de $[t_0, t_0 + 2\pi]$ es 2π, entonces cos y sen toman todos los valores en $[-1, 1]$, por lo que

$$f([t_0, t_0 + 2\pi]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Finalmente, si $k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\cos\left(t_0 + \frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos(t_0) & si \quad k = 4m \\ -\operatorname{sen}(t_0) & si \quad k = 4m + 1 \\ -\cos(t_0) & si \quad k = 4m + 2 \\ \operatorname{sen}(t_0) & si \quad k = 4m + 3 \end{cases}$$

y

$$\operatorname{sen}\left(t_0 + \frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t_0) & si \quad k = 4m \\ \cos(t_0) & si \quad k = 4m + 1 \\ -\operatorname{sen}(t_0) & si \quad k = 4m + 2 \\ -\cos(t_0) & si \quad k = 4m + 3 \end{cases}$$

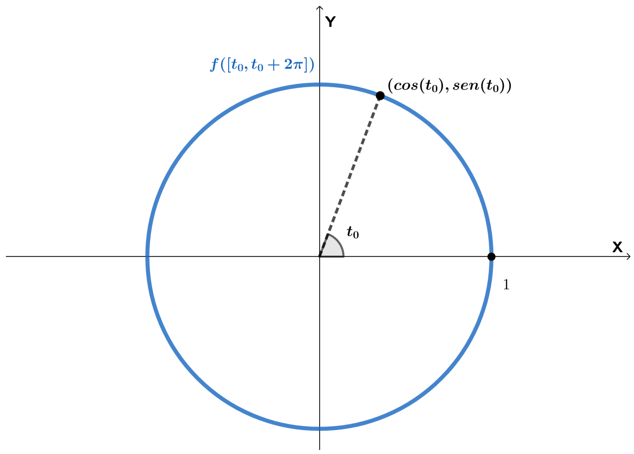


Figura 4: Se muestra $f\left([t_0, t_0+2\pi]\right)$.

Por lo que

$$f\left(\left\{t_0+\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\right)=\begin{cases}(\cos(t_0),\operatorname{sen}(t_0)) & si \quad k=4m\\ (-\operatorname{sen}(t_0),\cos(t_0)) & si \quad k=4m+1\\ (-\cos(t_0),-\operatorname{sen}(t_0)) & si \quad k=4m+2\\ (\operatorname{sen}(t_0),-\cos(t_0)) & si \quad k=4m+3\end{cases}$$

■

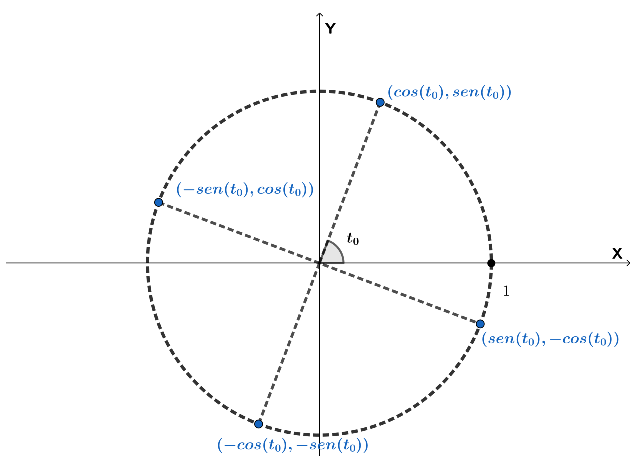


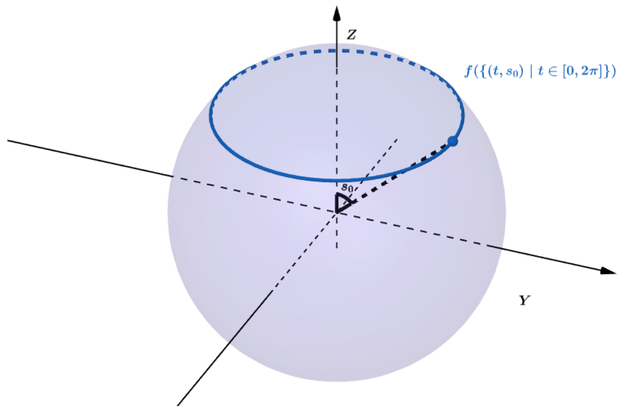
Figura 5: Se muestra $f\left(\left\{t_0+\dfrac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$.

Ejemplo 10 *Sea* $f:[0,2\pi]\times[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *la función dada por*

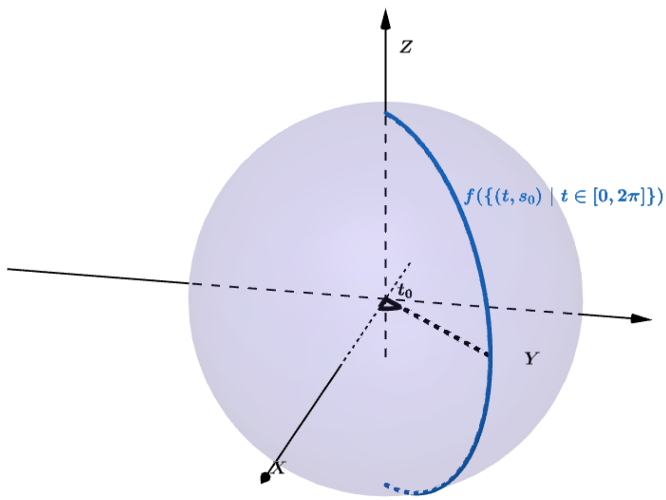
$$f(x,y)=\left(\cos(x)\operatorname{sen}(y),\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y),\cos(y)\right).$$

Identifique $f\left(\{(t,s_0)\mid t\in[0,2\pi]\}\right)$ *y* $f\left(\{(t_0,s)\mid s\in[0,\pi]\}\right)$, *donde* $t_0\in[0,2\pi]$ *y* $s_0\in[0,\pi]$ *son fijos.*

Solución. Es muy probable que esta función les haya recordado las coordenadas esféricas (vea Ayudantía 09) y están en lo correcto. Por ello, si $s_0\in[0,\pi]$ es fijo, entonces lo que obtenemos es una circunferencia sobre la esfera unitaria con centro en el origen, vea 6a, mientras que, si $t_0 \in [0, 2\pi]$ es fijo, entonces lo que obtenemos es una semicircunferencia sobre la esfera unitaria con centro en el origen, vea 6b. ■



(a) Se muestra $f(\{(t, s_0) \mid t \in [0, 2\pi]\})$.



(b) Se muestra $f(\{(t_0, s) \mid s \in [0, \pi]\})$.

Figura 6