Clase 15

En las sesiones pasadas vimos:

Definición 1 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos el **conjunto de nivel c de f** , denotado por $N_c(f)$, como

$$N_c(f) = \{\bar{x} \in A \mid f(\bar{x}) = c\}.$$

Definición 2 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos la **imagen inversa de D bajo f** , que denotaremos por $f^{-1}(D)$, como

$$f^{-1}(D) = \{\bar{x} \in A \mid f(\bar{x}) \in D\}.$$

Note que si $m = 1$ y $D = \{c\}$ entonces $N_c(f) = f^{-1}(\{c\})$.

Definición 3 Sean $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Definimos la **imagen (directa) bajo f de B** , denotada por $f(B)$, como

$$\begin{aligned} f(B) &= \{f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \bar{x} \in B\} \\ &= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{existe } \bar{x} \in B \text{ con } f(\bar{x}) = \bar{y}\} \end{aligned}$$

En esta sesión estudiaremos la relación que existe entre las imágenes directa e inversa y las operaciones entre conjuntos.

Propiedades de la imagen y de la imagen inversa

Proposición 4 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B, C \subseteq A$, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de subconjuntos de A , $D, E \subseteq \mathbb{R}^m$, $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) Si $D \subseteq E$, entonces $f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(E)$.

$$(2) f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f^{-1}(D_\alpha).$$

$$(3) f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} f^{-1}(D_\alpha).$$

$$(4) f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus D) = (\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(D)) \cap A = A \setminus f^{-1}(D).$$

(5) Si $B \subseteq C$, entonces $f(B) \subseteq f(C)$.

$$(6) f\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha).$$

$$(7) f \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha) \text{ y si } f \text{ es inyectiva } f \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha).$$

$$(8) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \text{ y si } f \text{ es inyectiva } f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B).$$

$$(9) B \subseteq f^{-1}(f(B)) \text{ y si } f \text{ es inyectiva } B = f^{-1}(f(B)).$$

$$(10) f(f^{-1}(D)) \subseteq D \text{ y } f(f^{-1}(D)) = D \text{ si y sólo si } D \subseteq f(A).$$

$$(11) f^{-1}(D) = f^{-1}(D \cap f(A)).$$

Demostración. Mostraremos solo algunos incisos y el resto quedan como ejercicio.

$$(1) \text{ Sea } \bar{x} \in f^{-1}(D). \text{ Se tiene que } f(\bar{x}) \in D \text{ y como } D \subseteq E, \text{ entonces } f(\bar{x}) \in E. \text{ Así, } \bar{x} \in f^{-1}(E).$$

$$(3) \text{ Note que } \bar{x} \in f^{-1} \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha \right) \text{ si y sólo si } f(\bar{x}) \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha, \text{ lo cual ocurre si y sólo si } f(\bar{x}) \in D_\alpha,$$

para todo $\alpha \in \Gamma$. Así, $\bar{x} \in f^{-1} \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha \right)$ si y sólo si $\bar{x} \in f^{-1}(D_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Gamma$, pero esto ocurre si y sólo si $\bar{x} \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} f^{-1}(D_\alpha)$.

$$(6) \subseteq] \text{ Sea } \bar{y} \in f \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right). \text{ Entonces, existe } \bar{x} \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \text{ de tal manera que } \bar{y} = f(\bar{x}). \text{ Como } \bar{x} \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha, \text{ existe } \alpha_0 \in \Gamma \text{ tal que } \bar{x} \in A_{\alpha_0}, \text{ de donde } \bar{y} \in f(A_{\alpha_0}). \text{ Luego, } \bar{y} \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha).$$

$$\supseteq] \text{ Como } A_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha, \text{ para todo } \beta \in \Gamma, \text{ del inciso (5), se sigue que } f(A_\beta) \subseteq f \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right),$$

$$\text{para todo } \beta \in \Gamma. \text{ Se sigue que } \bigcup_{\beta \in \Gamma} f(A_\beta) \subseteq f \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right).$$

$$(9) \text{ Sea } \bar{b} \in B. \text{ Es claro que } f(\bar{b}) \in f(B). \text{ De aquí que } \bar{b} \in f^{-1}(f(B)). \text{ Por lo tanto } B \subseteq f^{-1}(f(B)). \text{ Supongamos ahora que } f \text{ es inyectiva y sea } \bar{x} \in f^{-1}(f(B)). \text{ Así, si } \bar{y} = f(\bar{x}), \text{ entonces } \bar{y} \in f(B). \text{ Como } \bar{y} \in f(B), \text{ existe } \bar{b} \in B \text{ tal que } f(\bar{b}) = \bar{y}. \text{ Así, } f(\bar{x}) = f(\bar{b}), \text{ pero por ser } f \text{ inyectiva, se tiene que } \bar{x} = \bar{b} \text{ y de aquí que } \bar{x} \in B.$$

Para mostrar que la hipótesis de inyectividad es necesaria consideremos, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $B = [0, 2]$. Se tiene que $f(B) = [0, 4]$, luego, $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$. Así, $f^{-1}(f(B)) \not\subseteq B$.

$$(11) \supseteq] \text{ Como } D \cap f(A) \subseteq D, \text{ del inciso (1), se sigue que } f^{-1}(D \cap f(A)) \subseteq f^{-1}(D).$$

$$\subseteq] \text{ Sea } \bar{x} \in f^{-1}(D). \text{ Como } f^{-1}(D) \subseteq A, \text{ se tiene que } f(\bar{x}) \in D \cap f(A). \text{ Así, } \bar{x} \in f^{-1}(D \cap f(A)).$$

■