Última actualización: 1 de abril de 2022

Clase 17

Entre otras cosas, la clase anterior vimos lo siguiente:

Definición 1 *Una **sucesión en $\mathbb{R}^n$** es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ y cuyo contradominio es $\mathbb{R}^n$. Así, si $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una sucesión, denotaremos por $\overline{a}_k$ a la imagen bajo a del número natural k, es decir, $\overline{a}_k = a(k)$, y para referirnos a la sucesión "a" escribiremos $\{\overline{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{\overline{a}_k\}$.*

Observación 2 *Sea $\{\overline{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Note que, cada $\overline{a}_k \in \mathbb{R}^n$, por lo que tiene n coordenadas que denotaremos como sigue $\overline{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n})$. De esta manera, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos una sucesión $\{a_{k,i}\}$ en $\mathbb{R}$. A estas sucesiones las llamaremos **sucesiones coordenadas**.*

Definición 3 *Sean $\{\overline{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\overline{l} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que **$\{\overline{a}_k\}$ converge a $\overline{l}$**, denotado por $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{a}_k = \overline{l}$ o por $\{\overline{a}_k\} \longrightarrow \overline{l}$, si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todos los números naturales $k \geq N$ se tiene que $\|\overline{a}_k - \overline{l}\| < \varepsilon$.*

Definición 4 *Sea $\{\overline{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Diremos que la sucesión $\{\overline{a}_k\}$ **converge** si existe $\overline{l} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{a}_k = \overline{l}$. En este caso, diremos que $\overline{l}$ es el **límite de la sucesión** $\{\overline{a}_k\}$ y en cualquier otro caso, diremos que la sucesión $\{\overline{a}_k\}$ **diverge**.*

Proposición 5 *Sean $\{\overline{a}_k\} = \{(a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n})\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\overline{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que $\{\overline{a}_k\}$ converge a $\overline{l}$ si y sólo si $\{a_{k,i}\}$ converge a l_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

En esta sesión estudiaremos el concepto de subsucesiones de sucesiones en $\mathbb{R}^n$ y algunos resultados relacionados con estas.

Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definición 6 *Sea $\{\overline{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\{\overline{a}_{k_l}\}$ es una **subsucesión** de $\{\overline{a}_k\}$ si existe una función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $(a \circ g)(k) = \overline{a}_{k_l}$.*

Observación 7 *Una subsucesión de una sucesión es una sucesión, pues es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 8 *Si $\{\overline{a}_k\}$ es una sucesión, entonces $\{\overline{a}_k\}$ es subsucesión de $\{\overline{a}_k\}$ porque la función identidad $\mathrm{Id} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.*

Proposición 9 *Sean $\overline{l} \in \mathbb{R}^n$ y $\{\overline{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Se tiene que $\{\overline{a}_k\}$ converge a $\overline{l}$ si y sólo si cualquier subsucesión $\{\overline{a}_{k_l}\}$ de $\{\overline{a}_k\}$ converge a $\overline{l}$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\bar{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ y que $\{\bar{a}_k\} = \{(a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n})\}$. Ahora, note que si $\{\bar{a}_{k_l}\} = \{(a_{k_l,1}, a_{k_l,2}, \ldots, a_{k_l,n})\}$ es una subsuscesión de $\{\bar{a}_k\}$, entonces $\{a_{k_l,i}\}$ es una subsucesión de $\{a_{k,i}\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así, si $\{\bar{a}_k\}$ converge a $\bar{l}$, entonces, por la Proposición 5, $\{a_{k,i}\}$ converge a l_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ahora, de nuestros cursos de Cálculo I y II, sabemos que $\{a_{k,i}\}$ converge a l_i si y sólo si cualquier subsucesión de $\{a_{k,i}\}$ converge a l_i, lo anterior para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $\{a_{k_l,i}\}$ converge a l_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se sigue, de la Proposición 5, que la sucesión $\{\bar{a}_{k_l}\}$ conerge a $\bar{l}$.

$\Leftarrow$] Es claro, pues por el Ejemplo 8, $\{\bar{a}_k\}$ es subsucesión de sí misma. ■

Definición 10 *Sea $\{\bar{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Definimos el **rango** de $\{\bar{a}_k\}$, denotado por $\boldsymbol{R(\{\bar{a}_k\})}$, como la imagen bajo la función subyacente del conjunto $\mathbb{N}$, es decir,*

$$R(\{\bar{a}_k\}) = a(\mathbb{N}) = \{a(k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{\bar{a}_k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

donde $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la sucesión $\{\bar{a}_k\}$.

Ejemplo 11 *Considere la sucesión $\{\bar{a}_k\} = \left\{\left((-1)^k, (-1)^{k+1}\right)\right\}$ en $\mathbb{R}^2$. Se tiene que*

$$\begin{aligned} R(\{\bar{a}_k\}) &= \left\{\left((-1)^k, (-1)^{k+1}\right) \mid k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \{(-1, 1), (1, -1)\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Considere la sucesión $\{\bar{a}_k\} = \{(k, k+1, k+2)\}$ en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que*

$$\begin{aligned} R(\{\bar{a}_k\}) &= \{(k, k+1, k+2) \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), \ldots\}. \end{aligned}$$

Observación 13 *Sea $\{\bar{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Note que $\{\bar{a}_k\}$ es acotada si y sólo si $R(\{\bar{a}_k\})$ es un conjunto acotado.*

Lema 14 *Sea $\{\bar{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ cuyo rango es finito. Entonces existe una subsucesión $\{\bar{a}_{k_l}\}$ de $\{\bar{a}_k\}$ y un elemento $\bar{y} \in R(\{\bar{a}_k\})$ tal que $\bar{a}_{k_l} = \bar{y}$ para todo $l \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como $R(\{\bar{a}_k\})$ es finito, existen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$R(\{\bar{a}_k\}) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}.$$

Ahora, dado que

$$a^{-1}(\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}) = a^{-1}(\{\bar{x}_1\}) \cup a^{-1}(\{\bar{x}_2\}) \cup \cdots \cup a^{-1}(\{\bar{x}_n\})$$

y que $\mathbb{N} \subseteq a^{-1}(a(\mathbb{N})) = a^{-1}(\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\})$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a^{-1}(\{\bar{x}_i\})$ es un conjunto infinito. Supongamos entonces que

$$a^{-1}(\{\bar{x}_i\}) = \{k_1, k_2, \ldots, k_l, k_{l+1}, \ldots\},$$

con $k_l < k_{l+1}$ para todo $l \in \mathbb{N}$.
Así, $\{\bar{a}_{k_l}\}$ es la sucesión buscada y $\bar{y} = \bar{x}_i$ el elemento en $R(\{\bar{a}_k\})$ buscado. ■

Lema 15 *Sean $\{\bar{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $A = R(\{\bar{a}_k\})$. Si $A' \neq \varnothing$ y $\bar{l} \in A'$, entonces existe una subsucesión $\{\bar{a}_{k_l}\}$ de $\{\bar{a}_k\}$ tal que $\{\bar{a}_{k_l}\}$ converge a $\bar{l}$.*

Demostración. Sea $r_1 = 1$. Como $\bar{l} \in A'$, se tiene que $\dot{B}_{r_1}(\bar{l}) \cap A \neq \varnothing$. Entonces, sea $\bar{a}_{k_1} \in \dot{B}_{r_1}(\bar{l}) \cap A$. Note que

$$\|\bar{a}_{k_1} - \bar{l}\| < 1.$$

Ahora, sea $r_2 = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \|\bar{a}_{k_1} - \bar{l}\|\right\}$. Note que $r_2 > 0$ y como $\bar{l} \in A'$, $\dot{B}_{r_2}(\bar{l}) \cap A \neq \varnothing$. Así, existe $\bar{a}_{k_2} \in \dot{B}_{r_2}(\bar{l}) \cap A$ con $k_2 > k_1$. Note además que

$$\|\bar{a}_{k_2} - \bar{l}\| < \frac{1}{2}.$$

Supongamos entonces que tenemos $0 < r_l < \cdots < r_2 < r_1$ y que existen $\bar{a}_{k_1}, \bar{a}_{k_2}, \ldots, \bar{a}_{k_l} \in A$, con

$$\|\bar{a}_{k_j} - \bar{l}\| < \frac{1}{j},$$

para cada $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ y donde $k_l > k_{l-1} > \cdots > k_1$.

En este caso, definimos $r_{l+1} = \text{mín}\left\{\frac{1}{l+1}, \|\bar{a}_{k_l} - \bar{l}\|\right\}$. Note que $r_{l+1} > 0$ y como $\bar{l} \in A'$ se tiene que $\dot{B}_{r_{l+1}}(\bar{l}) \cap A \neq \varnothing$. Luego, existe $\bar{a}_{k_{l+1}} \in \dot{B}_{r_{l+1}}(\bar{l}) \cap A$ con $k_{l+1} > k_l$. Note además que

$$\|\bar{a}_{k_{l+1}} - \bar{l}\| < \frac{1}{l+1}.$$

Así, de manera inductiva, hemos construido $\{\bar{a}_{k_l}\}$ una subsucesión de $\{\bar{a}_k\}$. Veamos que dicha subsucesión converge a $\bar{l}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, si $l \geq N$, entonces

$$\|\bar{a}_{k_l} - \bar{l}\| < \frac{1}{l} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Así, $\{\bar{a}_{k_l}\}$ converge a $\bar{l}$. ■

Corolario 16 (¿Teorema de Bolzano-Weierstras?) *Sea $\{\bar{a}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Si $\{\bar{a}_k\}$ está acotada, entonces existe una subsucesión $\{\bar{a}_{k_l}\}$ de $\{\bar{a}_k\}$ que es convergente.*

Demostración. Sea $A = R(\{\bar{a}_k\})$. Note que A es un conjunto acotado. Si A es finito, por el Lema 14, existe $\{\bar{a}_{k_l}\}$ subsucesión de $\{\bar{a}_k\}$ que es convergente. Ahora, si A es infinito, como es acotado, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, $A' \neq \varnothing$. Así, por el Lema 15, existe $\{\bar{a}_{k_l}\}$ subsucesión de $\{\bar{a}_k\}$ que es convergente. ■

Como pudieron notar, en el corolario anterior aparece la pregunta *¿Teorema de Bolzano-Weierstras?*. La razón es porque en este curso ya vimos un teorema nombrado *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que “no tiene nada que ver” con sucesiones, pero en nuetsros cursos de Cálculo I y II vimos un teorema nombrado *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que, básicamente, dice lo mismo que el Corolario 16, es decir, que tiene todo que ver con sucesiones. Entonces, ¿hay dos teoremas con el mismo nombre? La respuesta es NO, de hecho, las afirmaciones de ambos teoremas son equivalentes. ¿Podrían demostrarlo?