Última actualización: 6 de abril de 2022

Clase 19

La clase anterior comenzamos el estudio de límites de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

Definición 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in A'$, $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Diremos que f tiene límite en $\overline{x}_0$ y que su límite es $\bar{l}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\overline{x} \in A$ que cumple que $0 < \|\overline{x} - \overline{x}_0\| < \delta$ se tiene que $\|f(\overline{x}) - \bar{l}\| < \varepsilon$. En este caso escribiremos*

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l}.$$

Proposición 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in A'$, $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se tiene que $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l}$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{\overline{x}_k\}$ contenida en $A \setminus \{\overline{x}_0\}$ que converge a $\overline{x}_0$ se tiene que la sucesión de imágenes $\{f(\overline{x}_k)\}$ converge a $\bar{l}$.*

¿Recuerda que *una sucesión en $\mathbb{R}^n$ converge si y sólo si cada sucesión coordenada converge*? Pues en esta sesión enunciaremos el resultado correspondiente a límite de funciones, lo cual nos permitirá omitir la demostración del teorema que lleva el mismo título que esta sesión, pues la demostración de dicho teorema recae totalmente en la versión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Aritmética de límites de funciones

Proposición 3 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in A'$, $\bar{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ y $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se tiene que $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l}$ si y sólo si $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_i(\overline{x}) = l_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

Demostración. Tarea. ■

Note que, dedido a esta proposición, el estudio de límites de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se puede "restringir" al estudio de límites de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4 *Sean $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función dada por*

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

Muestre que

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = (a + b, a - b).$$

Solución. Note que $f = (f_1, f_2)$ donde $f_1(x, y) = x + y$ y $f_2(x, y) = x - y$. Luego,

$$|f_1(x, y) - (a + b)| = |(x + y) - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b| \leq 2\|(x, y) - (a, b)\|$$

y

$$|f_2(x, y) - (a - b)| = |(x - y) - (a - b)| \leq |x - a| + |b - y| \leq 2\|(x, y) - (a, b)\|$$

para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Así, para $\varepsilon > 0$ dado, sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego, si $(x, y) \in A$ es tal que $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, entonces

$$|f_1(x, y) - (a + b)| \leq 2\|(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon$$

y

$$|f_2(x, y) - (a - b)| \leq 2\|(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon.$$

De donde

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_1(x, y) = a + b \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f_2(x, y) = a - b.$$

Se sigue, de la Proposición 3, que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = (a + b, a - b)$. ■

Como ya hemos comentado antes, no proporcionaremos la demostración completa (de hecho, solo demostraremos un detalle) del siguiente teorema, pues es consecuencia de la Proposición 3 y del teorema correspondiente de Cálculo I. Por supuesto que esperamos que ustedes escriban su demostración.

Teorema 5 (Aritmética de límites de funciones) *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in A'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{l}, \overline{p} \in \mathbb{R}^m$ y $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tres funciones. Si*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l} \qquad y \qquad \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = \overline{p},$$

entonces:

(1) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} (f + g)(\overline{x}) = \bar{l} + \overline{p}$.

(2) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} (\alpha f)(\overline{x}) = \alpha\bar{l}$.

(3) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} (f \cdot g)(\overline{x}) = \bar{l} \cdot \overline{p}$.

(4) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} (f \times g)(\overline{x}) = \bar{l} \times \overline{p}$, si $m = 3$.

(5) si $m = 1$ ($\overline{p} = p \in \mathbb{R}$ y $\bar{l} = l \in \mathbb{R}$), $B = \{\overline{x} \in A \mid g(\overline{x}) \neq 0\}$ y $p \neq 0$, se tiene que $\overline{x}_0 \in B'$ y además
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\overline{x}) = \frac{l}{p}.$$

(6) [**Sándwhich**] si $m = 1$ ($\overline{p} = p \in \mathbb{R}$ y $\bar{l} = l \in \mathbb{R}$), $l = p$ y existe $r > 0$ tal que $f(\overline{x}) \leq h(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in \dot{B}_r(\overline{x}_0) \cap A$, entonces
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} h(\overline{x}) = l.$$

Demostración.

(5) Veamos que, en efecto, $\overline{x}_0 \in B'$. Para ello, utilizaremos el inciso (3) del Lema 3 visto en la Ayudantía 14.

Como $\overline{x}_0 \in A'$, existe una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ contenida en $A \setminus \{\overline{x}_0\}$ tal que $\{\overline{x}_k\} \longrightarrow \overline{x}_0$. Luego, $\{g(\overline{x}_k)\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ y además, por la Proposición 2, $\{g(\overline{x}_k)\} \longrightarrow p \neq 0$.

Así, para el número positivo $\dfrac{|p|}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(\overline{x}_k) - p| < \frac{|p|}{2},$$

para toda $k \geq N$. De aquí que

$$0 < \frac{|p|}{2} < |g(\overline{x}_k)|,$$

para toda $k \in \mathbb{N}$, así que $g(\overline{x}_k) \neq 0$, para toda $k \geq N$.

De esta manera, la subsucesión $\{\overline{x}_{l+N}\}$ de $\{\overline{x}_k\}$ cumple que $\{\overline{x}_{l+N}\} \longrightarrow \overline{x}_0$ y está contenida en B. Por lo tanto, $\overline{x}_0 \in B'$.

Para mostrar que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(\overline{x}) = \dfrac{l}{p}$ se procede igual que en Cálculo I.

■

Igual que en Cálculo I, podemos preguntarnos si la composición es una operación que debe estar incluida en el teorema anterior, es decir:
Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $\overline{x}_0 \in A'$, $\overline{l} \in D'$, $\overline{p} \in \mathbb{R}^s$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^s$ son dos funciones tales que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{l}$, $\lim\limits_{\overline{y}\to\overline{l}} g(\overline{y}) = \overline{p}$ y $\overline{x}_0 \in \left(g^{-1}(D)\right)'$, ¿entonces $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} (f \circ g)(\overline{x}) = \overline{p}$? La respuesta la proporciona el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 *Considere las funciones $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g(x,y) = x$ y*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad t = 0. \end{cases}$$

Muestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f \circ g)(x,y)$ no existe.

Solución. Primero note que $(0,0) \in \left(\mathbb{R}^2\right)'$, $0 \in \mathbb{R}'$. Ahora, $|g(x,y)| = |x| \leq \|(x,y)\|$, por lo que es fácil ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

Por otro lado, es claro que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$. También tenemos que $g^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$, por lo que $(0,0) \in \left(g^{-1}(\mathbb{R})\right)'$.

Ahora, consideremos las sucesiones $\{\overline{x}_k\} = \{(0, 1/k)\}$ y $\{\overline{y}_k\} = \{(1/k, 0)\}$. Note que $\{\overline{x}_k\}$ y $\{\overline{y}_k\}$ están contenidas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\{\overline{x}_k\} \longrightarrow (0,0)$ y $\{\overline{y}_k\} \longrightarrow (0,0)$. Luego, $(f \circ g)(\overline{x}_k) = 1$ y $(f \circ g)(\overline{y}_k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde $\{(f \circ g)(\overline{x}_k)\} \longrightarrow 1$ y $\{(f \circ g)(\overline{y}_k)\} \longrightarrow 0$.

Concluimos, de la Proposición 2, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (f \circ g)(x,y)$ no existe. ■