

## Clase 21

La sesión pasada vimos, entre otras cosas, lo siguiente:

**Definición 1** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_0 \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Diremos que  $f$  es continua en  $\bar{x}_0$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\bar{x} \in A$  que satisface que  $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \varepsilon$ , entonces  $\|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)\| < \varepsilon$ .

Que en términos de bolas, se enuncia así:  $f$  es continua en  $\bar{x}_0$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B_\delta(\bar{x}_0) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(\bar{x}_0))$ .

**Proposición 2** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_0 \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se tiene que:

- (1) Si  $\bar{x}_0$  es un punto aislado de  $A$ , entonces  $f$  es continua en  $\bar{x}_0$
- (2) Si  $\bar{x}_0$  es un punto de acumulación de  $A$ , se cumple que  $f$  es continua en  $\bar{x}_0$  si y sólo si  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$ .
- (3) La función  $f$  es continua en  $\bar{x}_0$  si y sólo si para cualquier sucesión  $\{\bar{x}_k\}$  contenida en  $A$  que converge a  $\bar{x}_0$  se tiene que  $\{f(\bar{x}_k)\}$  converge a  $f(\bar{x}_0)$ .

**Proposición 3** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_0 \in A$  y  $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función. Se tiene que,  $f$  es continua en  $\bar{x}_0$  si y sólo si  $f_i$  es continua en  $\bar{x}_0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

**Proposición 4** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{x}_0 \in A$ ,  $\bar{y}_0 = g(\bar{x}_0) \in D$  y  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  dos funciones. Si  $g$  es continua en  $\bar{x}_0$  y  $f$  continua en  $\bar{y}_0$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $\bar{x}_0$ .

En esta ocasi'ón estudiaremos la relación que hay entre funciones continuas en un punto adecuado y funciones para las cuales existe el límite en un punto adecuado.

## Funciones continuas ¿entran y salen de los límites?

**Proposición 5** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_0 \in A$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{l} \in D$  y  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  dos funciones tales que  $\bar{x}_0 \in (g^{-1}(D))' \subseteq A$ . Si  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = \bar{l}$  y  $f$  es continua en  $\bar{l}$ , entonces  $f \circ g$  tiene límite en  $\bar{x}_0$ . Más aún,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \circ g)(\bar{x}) = f\left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x})\right).$$

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es continua en  $\bar{l}$ , existe  $\delta' > 0$  tal que para cualquier  $\bar{y} \in D$  que cumpla que  $\|\bar{y} - \bar{l}\| < \delta'$  se tiene que

$$\|f(\bar{y}) - f(\bar{l})\| < \varepsilon. \quad (1)$$

Por otro lado, como  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = \bar{l}$ , para el número positivo  $\delta'$ , existe  $\delta > 0$  de tal manera que para cualquier  $\bar{x} \in A$  que cumpla que  $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta$  se tiene que

$$\|g(\bar{x}) - \bar{l}\| < \delta'. \quad (2)$$

Ahora, si  $\bar{x} \in \text{Dom}(f \circ g) = \{\bar{x} \in A \mid g(\bar{x}) \in D\}$  cumple que  $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta$ , por (2), se tiene que

$$\|g(\bar{x}) - \bar{l}\| < \delta'.$$

Luego, por (1), se sigue que

$$\|f(g(\bar{x})) - f(\bar{l})\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $f \circ g$  tiene límite en  $\bar{x}_0$ , de hecho,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \circ g)(\bar{x}) = f(\bar{l}),$$

es decir,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \circ g)(\bar{x}) = f\left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x})\right).$$

■

**Ejemplo 6** Considere la función  $h(x, y) = e^{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}$ . Encuentre, si existe,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} e^{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}.$$

**Solución.** Sean  $f$  y  $g$  las funciones dadas por  $f(t) = e^t$  y  $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ . Note que  $h = f \circ g$ .

Ahora, como  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , para ver que el límite requerido existe, por la Proposición 5, bastaría ver que  $g$  tiene límite en  $(0, 0)$ . Para ello, observe que

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x|^2 |y|}{\|(x, y)\|^2} \leq \frac{\|(x, y)\|^3}{\|(x, y)\|^2} = \|(x, y)\|,$$

para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ . De aquí que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0$ . Concluimos, de la Proposición 5, que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} e^{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (f \circ g)(x, y) = f\left(\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y)\right) = e^{\left(\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right)} = e^0 = 1.$$

■

¿Y qué ocurre si  $g$  es la función continua y para  $f$  solo existe el límite?

**Proposición 7** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_0 \in A$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{l} \in \mathbb{R}^k$  y  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  dos funciones tales que  $\bar{y}_0 = g(\bar{x}_0) \in D$ . Si  $g$  es continua en  $\bar{x}_0$ ,  $\lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{y}_0} f(\bar{y}) = \bar{l}$  y existe  $r > 0$  tal que  $g(\bar{x}) \neq \bar{y}_0$  para todo  $\bar{x} \in \dot{B}_r(\bar{x}_0)$ , entonces  $f \circ g$  tiene límite en  $\bar{x}_0$ . Más aún,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \circ g)(\bar{x}) = \bar{l}.$$

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{y}_0} f(\bar{y}) = \bar{l}$ , existe  $\delta' > 0$  tal que para cualquier  $\bar{y} \in D$  que cumpla que  $0 < \|\bar{y} - \bar{y}_0\| < \delta'$  se tiene que

$$\|f(\bar{y}) - \bar{l}\| < \varepsilon. \quad (3)$$

Por otro lado, como  $g$  es continua en  $\bar{x}_0$ , para el número positivo  $\delta'$ , existe  $\delta'' > 0$  de tal manera que para cualquier  $\bar{x} \in A$  que cumpla que  $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta''$  se tiene que

$$\|g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0)\| < \delta'. \quad (4)$$

Sea  $\delta = \min\{\delta'', r\}$ , note que  $\delta > 0$ . Así, si  $\bar{x} \in \text{Dom}(f \circ g) = \{\bar{x} \in A \mid g(\bar{x}) \in D\}$  cumple que  $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta$ , se tiene, por hipótesis, que  $g(\bar{x}) \neq \bar{y}_0$  y, por (4), que  $\|g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0)\| < \delta'$ . De aquí que

$$0 < \|g(\bar{x}) - \bar{y}_0\| < \delta'. \quad (5)$$

Finalmente, de (3), concluimos que

$$\|f(g(\bar{x})) - \bar{l}\| < \varepsilon.$$

Así,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \circ g)(\bar{x}) = \bar{l}.$$

■

**Ejemplo 8** Considera la función  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ . Indique si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

**Solución.** Consideremos las funciones  $g_1$  y  $g_2$  dadas por

$$g_1(t) = (t, mt) \quad \text{y} \quad g_2(t) = (t, t^2).$$

Note que  $g_1(0) = (0, 0)$ ,  $g_2(0) = (0, 0)$  y que  $g_1$  y  $g_2$  son continuas en 0, además, son inyectivas en todo  $\mathbb{R}$ .

Ahora, supongamos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existe, digamos que es  $l \in \mathbb{R}$ . Entonces, por la Proposición 7, se tiene que

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ g_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt}{t^2 + m^2} = 0.$$

Así que  $l = 0$ . Pero, por otro lado, también por la Proposición 7, se tiene que

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ g_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que,  $l = 1/2$ , lo cual es una contradicción al hecho de que el límite de una función es único.

Concluimos entonces que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  no existe. ■

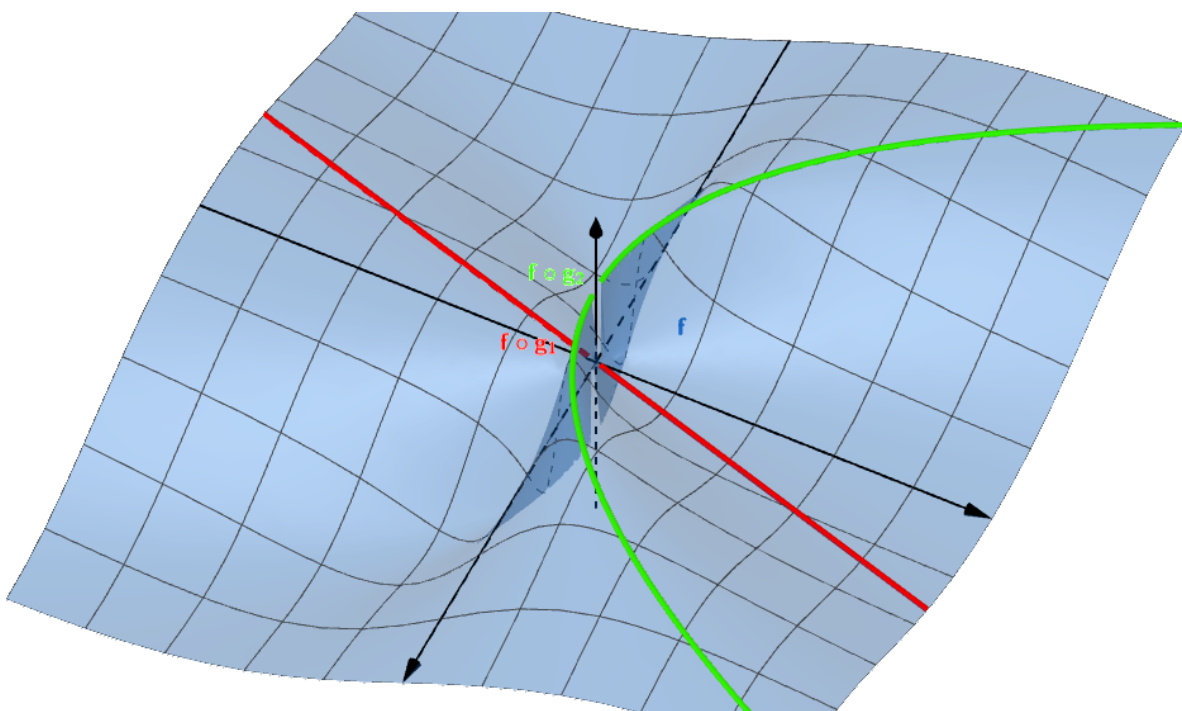


Figura 1: La manera de proceder en el Ejemplo 8 suele denominarse *aproximación por trayectorias*.