Clase 22

Para esta clase es conveniente recordar la definición de continuidad en un punto usando bolas:

Definición 1 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f es continua en $\bar{x}_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(\bar{x}_0) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(\bar{x}_0))$.

Como seguramente recordarán, de sus cursos de Cálculo I, hay tres teoremas sobre continuidad que son llamados *Teoremas Fuertes de Continuidad*, pues en esta ocasión comenzaremos el estudio de las versiones correspondientes de estos teoremas para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Teoremas Fuertes de Continuidad (primera parte)

Definición 2 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Diremos que f es continua en B si f es continua en $\bar{x}$ para cada $\bar{x} \in B$.

Proposición 3 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se tiene que, f es continua en A si y sólo si para cualquier conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(V) = A \cap U$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. Note que si $f^{-1}(V) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(V) = \emptyset \cap A$, por lo que en este caso se cumple la afirmación.

Supongamos ahora que $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Note que, para cada $\bar{x} \in f^{-1}(V)$, se tiene que $f(\bar{x}) \in V$, por lo que existe $\varepsilon_{\bar{x}} > 0$ de tal manera que $B_{\varepsilon_{\bar{x}}}(f(\bar{x})) \subseteq V$. Luego, usando que f es continua en $\bar{x}$ (vea la Definición 1), existe $\delta_{\bar{x}} > 0$ tal que

$$f(B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x}) \cap A) \subseteq B_{\varepsilon_{\bar{x}}}(f(\bar{x})),$$

de donde

$$B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x}) \cap A \subseteq f^{-1}(B_{\varepsilon_{\bar{x}}}(f(\bar{x}))).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x}) \right) \cap A &= \bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} (B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x}) \cap A) \\ &\subseteq \bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} f^{-1}(B_{\varepsilon_{\bar{x}}}(f(\bar{x}))) \\ &= f^{-1} \left(\bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} B_{\varepsilon_{\bar{x}}}(f(\bar{x})) \right) \\ &\subseteq f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Pero, note también que $f^{-1}(V) \subseteq \left(\bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x}) \right) \cap A$. Por lo que,

$$f^{-1}(V) = \left(\bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x}) \right) \cap A.$$

Así, si definimos $U = \bigcup_{\bar{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\bar{x}}}(\bar{x})$, se tiene que U es un conjunto abierto, pues es unión de conjuntos abiertos, y $f^{-1}(V) = U \cap A$.

$\Leftarrow$] Sea $\bar{x} \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $B_{\varepsilon}(f(\bar{x})) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto, existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $f^{-1}(B_{\varepsilon}(f(\bar{x}))) = U \cap A$. Ahora, como $\bar{x} \in f^{-1}(B_{\varepsilon}(f(\bar{x})))$ y U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}(\bar{x}) \subseteq U$, así que

$$B_{\delta}(\bar{x}) \cap A \subseteq U \cap A = f^{-1}(B_{\varepsilon}(f(\bar{x})))$$

y de aquí que

$$f(B_{\delta}(\bar{x}) \cap A) \subseteq f(f^{-1}(B_{\varepsilon}(f(\bar{x})))) \subseteq B_{\varepsilon}(f(\bar{x})).$$

Entonces, f es continua en $\bar{x}$. Finalmente, como lo anterior ocurre para cualquier $\bar{x} \in A$, concluimos que f es continua en A . ■

Teorema 4 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A . Si B es conexo, entonces $f(B)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que no es así, es decir, que $f(B)$ es desconexo. Entonces, por la Proposición 5 de la Clase 12, existen conjuntos abiertos $\tilde{U}, \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que

- (1) $f(B) \subseteq \tilde{U} \cup \tilde{V}$,
- (2) $f(B) \cap \tilde{U} \neq \emptyset \neq f(B) \cap \tilde{V}$ y
- (3) $f(B) \cap \tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$.

Ahora, por la Proposición 3, existen conjuntos abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que

$$f^{-1}(\tilde{U}) = U \cap A \quad \text{y} \quad f^{-1}(\tilde{V}) = V \cap A. \quad (*)$$

Del inciso (1) y de las igualdades de (*) se tiene que

$$\begin{aligned} B &\subseteq f^{-1}(f(B)) \\ &\subseteq f^{-1}(\tilde{U} \cup \tilde{V}) \\ &= f^{-1}(\tilde{U}) \cup f^{-1}(\tilde{V}) \\ &= (U \cup V) \cap A, \end{aligned}$$

de donde

$$B \subseteq U \cup V. \quad (i)$$

Luego, por el inciso (2), sabemos que $f(B) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, por lo que existe $\bar{x} \in B$ tal que $f(\bar{x}) \in \tilde{U}$. Se sigue que $\bar{x} \in f^{-1}(\tilde{U}) = U \cap A$, donde la última igualdad se debe a (*). Pero, $\bar{x} \in B$, por lo que $\bar{x} \in U \cap B$ y de aquí que

$$U \cap B \neq \emptyset. \quad (\text{ii})$$

De manera análoga se demuestra que

$$V \cap B \neq \emptyset. \quad (\text{iii})$$

Ahora, por (3) y dado que $B \subseteq A$ y $B \subseteq f^{-1}(f(B))$, se tiene que

$$\begin{aligned} B \cap U \cap V &= B \cap (U \cap A) \cap (V \cap A) \\ &= B \cap f^{-1}(\tilde{U}) \cap f^{-1}(\tilde{V}) \\ &\subseteq f^{-1}(f(B)) \cap f^{-1}(\tilde{U}) \cap f^{-1}(\tilde{V}) \\ &= f^{-1}(f(B) \cap \tilde{U} \cap \tilde{V}) \\ &= f^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

es decir,

$$B \cap U \cap V = \emptyset. \quad (\text{iv})$$

Así, de (i), (ii), (iii), (iv) y de la Proposición 5 de la Clase 12, se tiene que B es un conjunto disconexo. ■

Corolario 5 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A . Si B es conexo y $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B$ son tales que $f(\bar{x}_1) < f(\bar{x}_2)$, entonces para todo $c \in (f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2))$ existe $\bar{x}_c \in B$ tal que $f(\bar{x}_c) = c$.

Demostración. Por el Teorema 4, sabemos que $f(B) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto conexo. Ahora, como $f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2) \in f(B)$ y $c \in (f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2))$, por el Ejercicio (6) de la Tarea 02, se tiene que $c \in f(B)$. Así, existe $\bar{x}_c \in B$ tal que $f(\bar{x}_c) = c$. ■

Corolario 6 (Teorema del Valor Intermedio) Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $d, e \in [a, b]$, con $d < e$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma cualquier valor entre $f(d)$ y $f(e)$.