Última actualización: 27 de abril de 2022

Clase 23

La sesión anterior, vimos, entre otras cosas, lo siguiente:

Proposición 1 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se tiene que, f es continua en A si y sólo si para cualquier conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(V) = A \cap U$.*

Teorema 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es conexo, entonces $f(B)$ es conexo.*

Corolario 3 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A. Si B es conexo y $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B$ son tales que $f(\overline{x}_1) < f(\overline{x}_2)$, entonces para todo $c \in (f(\overline{x}_1), f(\overline{x}_2))$ existe $\overline{x}_c \in B$ tal que $f(\overline{x}_c) = c$.*

Corolario 4 (Teorema del Valor Intermedio) *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $d, e \in [a, b]$, con $d < e$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma cualquier valor entre $f(d)$ y $f(e)$.*

En esta ocasión continuaremos estudiando las versiones para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, de los *Teoremas Fuertes de Continuidad* que estudiamos en nuestros cursos de Cálculo I.

Teoremas Fuertes de Continuidad (segunda parte)

Ejemplo 5 *Demuestre que el conjunto $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{xy} > 1 \right\}$ es un conjunto abierto.*

Solución. Sean $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente regla de correspondencia $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$. Note que f es continua en su dominio y que $B = f^{-1}((1, \infty))$. Así, por la Proposición 1, tenemos que existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $U \cap A = B$. Finalmente, note que A es abierto y como la intersección finita de abiertos es un conjunto abierto, resulta que B es abierto. ■

Ejemplo 6 *Sean $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que si A es conexo, entonces el conjunto*

$$A + \overline{x}_0 := \{\ \overline{x} + \overline{x}_0 \mid \overline{x} \in A\ \}$$

es conexo.

Solución. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función dada por $f(\overline{x}) = \overline{x} + \overline{x}_0$. Note que f es continua en todo $\mathbb{R}^n$. Así, por el Teorema 2, tenemos que $f(A)$ es conexo, pero $f(A) = A + \overline{x}_0$. ■

Pueden recordar el ejemplo anterior con la siguiente frase: *Trasladar preserva conexidad.*

Después de estos ejemplos, que muestran una forma de utilizar la Proposición 1 y el Teorema 2, continuamos con los demás *Teoremas Fuertes de Continuidad.*

Teorema 7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es un conjunto cerrado y acotado, entoncces $f(B)$ es acotado.*

Demostración. Si $f(B)$ es no es acotado, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\overline{x}_k \in B$ tal que $\|f(\overline{x}_k)\| > k$. Note que de esta manera obtenemos una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ en B.

Ahora, por ser B acotado, la sucesión $\{\overline{x}_k\}$ es acotada. Se sigue que, existe una subsucesión $\{\overline{x}_{k_l}\}$ de $\{\overline{x}_k\}$ que es convergente, digamos a $\overline{x}_0$, es decir, $\{\overline{x}_{k_l}\} \longrightarrow \overline{x}_0$. Luego, como B es cerrado, se tiene que $\overline{x}_0 \in B$.

Consideremos ahora la sucesión $\{f(\overline{x}_{k_l})\}$. Como f es continua en $\overline{x}_0$, se tiene que $\{f(\overline{x}_{k_l})\} \longrightarrow f(\overline{x}_0)$, de donde $\{f(\overline{x}_{k_l})\}$ es acotada, lo que contradice que $\|f(\overline{x}_{k_l})\| > k_l$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Así $f(B)$ es acotado. ■

Una consecuencia de este teorema es el siguiente *Teorema fuerte de continuidad* visto en nuestros cursos de Cálculo I.

Corolario 8 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces f es acotada en $[a, b]$.*

A continuación, el último *Teorema Fuerte de Continuidad* de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 9 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es un conjunto cerrado y acotado, entonces $f(B)$ es cerrado y acotado.*

Demostración. Por el Teorema 7, tenemos que $f(B)$ es acotado, así que solo resta demostrar que es cerrado. Para ello, mostraremos que $f(B)' \subseteq f(B)$.

Si $f(B)' = \varnothing$, claramente se da la contención, así que supongamos que $f(B)' \neq \varnothing$ y sea $\overline{y}_0 \in f(B)'$. Se tiene que, existe una sucesión $\{\overline{y}_k\}$ en $f(B) \setminus \{\overline{y}_0\}$ que converge a $\overline{y}_0$. Ahora, como $\{\overline{y}_k\}$ es una sucesión en $f(B)$, existe una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ en B tal que $f(\overline{x}_k) = \overline{y}_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Note que $\{\overline{x}_k\}$ es acotada, pues B es acotado, así que existe una subsucesión $\{\overline{x}_{k_l}\}$ de $\{\overline{x}_k\}$ que es convergente, digamos a $\overline{x}_0$. Luego, dado que B es cerrado, se tiene que $\overline{x}_0 \in B$.

Finalmente, como f es continua en $\overline{x}_0$, se tiene que $\{f(\overline{x}_{k_l})\} \longrightarrow f(\overline{x}_0)$, pero $f(\overline{x}_{k_l}) = \overline{y}_{k_l}$ para todo $l \in \mathbb{N}$ y $\{\overline{y}_k\} \longrightarrow \overline{y}_0$, así que $\overline{y}_0 = f(\overline{x}_0) \in f(B)$. ■

Corolario 10 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A. Si B es un conjunto no vacío, cerrado y acotado, entonces existen $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B$ tales que $f(\overline{x}_1) \leq f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_2)$, para cada $\overline{x} \in B$. Es decir, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre B.*

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos que $f(B) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y acotado. Note también que $f(B)$ es no vacío, por lo que existe $\sup f(B)$ e $\inf f(B)$. Ahora, tanto $\sup f(B)$ como $\inf f(B)$ son puntos de acumulación de $f(B)$ (¿por qué?) y como $f(B)$ es cerrado, se tiene que $\sup f(B), \inf f(B) \in f(B)$. Luego, existen $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B$ tales que $f(\overline{x}_1) = \inf f(B)$ y $f(\overline{x}_2) = \sup f(B)$ y de aquí se sigue el resultado. ■

Note que el siguiente corolario es el último *Teorema Fuerte de Continuidad*, estudiado en Cálculo I, que nos faltaba.

Corolario 11 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces existen $x, z \in [a, b]$ tales que $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$ para todo $y \in [a, b]$.*

En los *Teoremas Fuertes de Continuidad* hemos demostrado que las funciones continuas "mandan conjuntos conexos en conexos y conjuntos cerrados y acotados en cerrados y acotados". No es extraño preguntarse si las funciones continuas "mandan conjuntos abiertos en abiertos y cerrados en cerrados". En general esto no ocurre.

Observación 12 *La imagen, bajo una función continua, de un conjunto abierto no necesariamente es un conjunto abierto: Sea* $c \in \mathbb{R}$. *Definimos* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *como sigue,* $f(\overline{x}) = c$ *para todo* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. *Note que* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto,* $\{c\} \subseteq \mathbb{R}$ *es un conjunto cerrado y que* $f(\mathbb{R}^n) = \{c\}$.

Observación 13 *La imagen, bajo una función continua, de un conjunto cerrado no necesariamente es un conjunto cerrado: Consideremos* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por la siguiente regla de correspondencia,* $f(x, y) = x$, *para cada* $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, *y* $A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \;\middle|\; x > 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Note que* A *es un conjunto cerrado y que* $f(A) = (0, \infty)$ *es un conjunto abierto.*