Última actualización: 30 de abril de 2022

Clase 24

Antes de comenzar es conveniente recordar la definición de continuidad en un punto:

Definición 1 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f es continua en $\overline{x}_0$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\overline{x} \in A$ que satisface que $\|\overline{x} - \overline{x}_0\| < \varepsilon$, entonces $\|f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)\| < \varepsilon$.*

Con bolas: Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f es continua en $\overline{x}_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B_\delta(\overline{x}_0) \cap A\right) \subseteq B_\varepsilon\left(f(\overline{x}_0)\right)$.

En esta sesión estudiaremos dos conceptos, uno ya conocido desde nuestros cursos de Cálculo I y Cálculo II, la continuidad uniforme, y el otro totalmente nuevo, la compacidad.

Continuidad Uniforme y Compacidad

Definición 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f es uniformemente continua en B si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in B$ que satisfacen que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$ se tiene que $\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| < \varepsilon$.*

Si escribimos la definición anterior usando bolas abiertas tenemos que: f es uniformemente continua en B si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(\overline{x}) \cap B) \subseteq B_\varepsilon(f(\overline{x}))$ para todo $\overline{x} \in B$.

Observación 3 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es uniformemente continua en B, entonces f es continua en B.*

De manera similar que la continuidad puntual, la continuidad uniforme de una función se puede caracterizar a tráves de la continuidad uniforme de cada una de sus funciones coordenadas. La demostración de este hecho es un ejercicio para ustedes.

Proposición 4 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se tiene que, f es uniformemente continua en B si y sólo si f_i es uniformemente continua en B para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$.*

Ejemplo 5 *Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por la regla de correspondencia $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\|$, es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Note que $|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| = \left|\|\overline{x}\| - \|\overline{y}\|\right| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|$ para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$. Así, si $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ cumplen que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \varepsilon$, entonces $|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| < \varepsilon$. ■

Hemos visto ya que la continuidad uniforme de f en B implica la continua de f en B y es natural preguntarse si vale el regreso, es decir, si f es continua en B entonces ¿f es uniformemente continua en B?

Ejemplo 6 *Sean $A = \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\overline{x}) = \dfrac{1}{\|\overline{x}\|}$. Demuestre que, si $B \subseteq A$ es tal que $\overline{0} \in B'$, entonces f no es uniformemente continua en B.*

Demostración. Debemos demostrar que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existen $\overline{x}, \overline{y} \in B$ que satisfacen $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$, pero $|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \geq \varepsilon$.

Sean $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario. Como $\overline{0} \in B'$, existe $\overline{x}_1 \in \dot{B}_{\frac{\delta}{2}}(\overline{0}) \cap B$. Es decir, existe $\overline{x}_1 \in B$ que cumple que

$$0 < \|\overline{x}_1\| = \|\overline{x}_1 - \overline{0}\| < \frac{\delta}{2}.$$

Ahora, como $0 < \|\overline{x}_1\|$, se sigue que

$$0 < \frac{\|\overline{x}_1\|}{1 + \|\overline{x}_1\|} < \|\overline{x}_1\|.$$

Luego, usando, una vez más, que $\overline{0} \in B'$, tenemos que existe $\overline{x}_2 \in \dot{B}_{\frac{\|\overline{x}_1\|}{1+\|\overline{x}_1\|}}(\overline{0}) \cap B$, es decir, existe $\overline{x}_2 \in B$ que cumple que

$$0 < \|\overline{x}_2\| = \|\overline{x}_2 - \overline{0}\| < \frac{\|\overline{x}_1\|}{1 + \|\overline{x}_1\|}.$$

De esto último se tiene que $\dfrac{1}{\|\overline{x}_2\|} > \dfrac{1 + \|\overline{x}_1\|}{\|\overline{x}_1\|}$ y también que $\|\overline{x}_2\| < \|\overline{x}_1\|$. Así, tenemos que $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B$, cumplen que

$$\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\| \leq \|\overline{x}_1\| + \|\overline{x}_2\| < 2\|\overline{x}_1\| < \delta$$

pero

$$|f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2)| = \left| \frac{1}{\|\overline{x}_1\|} - \frac{1}{\|\overline{x}_2\|} \right| = \frac{1}{\|\overline{x}_2\|} - \frac{1}{\|\overline{x}_1\|} > \frac{1 + \|\overline{x}_1\|}{\|\overline{x}_1\|} - \frac{1}{\|\overline{x}_1\|} = 1.$$

Que es lo que deseabamos demostrar. ■

Este ejemplo muestra que aunque una función f sea continua en un conjunto B, NO necesariamente es uniformemente continua en B. Otra observación sobre este ejemplo es que teníamos como hipótesis que $\overline{0} \in B'$, así que podemos preguntarnos qué ocurre si $\overline{0}$ no es un punto de acumulación de B. La respuesta es que en cualquier conjunto $B \subseteq A$ que no tenga como punto de acumulación a $\overline{0}$ la función f será uniformemente continua en B, resultado que demostrarán en la Ayudantía. Note entonces que la continuidad uniforme de f en B no solo depende de f también depende de una propiedad del conjunto B, en este caso de si $\overline{0}$ es punto de acumulación de B o no. Esto ocurre en general, es decir, la continuidad uniforme de una función también depende del conjunto donde la estemos considerando.

Bueno, entonces ¿qué podemos pedir para que la continuidad implique la continuidad uniforme? Analicemos esta situación:

Consideremos una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua en A. Se tiene que, para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $\overline{x} \in A$ existe $\delta_{\overline{x}} > 0$ tal que

$$f(B_{\delta_{\overline{x}}}(\overline{x}) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(\overline{x})).$$

Si pudieramos hallar un δ que no dependa de ningún $\overline{x}$ y que cumpliera que

$$f(B_\delta(\overline{x}) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(\overline{x}))$$

para todo $\overline{x} \in A$, entonces f sería uniformemente continua en A. Una posibilidad es considerar $\delta = \inf\{ \delta_{\overline{x}} \mid \overline{x} \in A \}$, pero podría suceder que dicho ínfimo sea cero (noten que si $\{ \delta_{\overline{x}} \mid \overline{x} \in A \}$ fuera finito, entonces el ínfimo ya no sería cero). Entonces debemos hallar otro camino para encontrar la δ buscada. Observe que

$$A \subseteq \bigcup_{\overline{x}\in A} B_{\delta_{\overline{x}}}(\overline{x}).$$

Así, si existieran $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k \in A$ tales que

$$A \subseteq B_{\delta_{\overline{x}_1}}(\overline{x}_1) \cup B_{\delta_{\overline{x}_2}}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{\delta_{\overline{x}_k}}(\overline{x}_k)$$

$\delta = \text{mín}\{\ \delta_{\overline{x}_i} \mid i \in \{1, 2, ..., k\}\}$ sería un candidato, pues en este caso, resultará positivo. Antes de continuar nuestro análisis daremos la definición de los conjuntos que cumplen una propiedad similar a la que nos gustaría que cumpliera A.

Definición 7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de sunconjuntos de $\mathbb{R}^n$ indexada por el conjunto Λ. Diremos que $\mathscr{U}$ es una* ***cubierta abierta*** *de A si U_λ es un conjunto abierto para toda $\lambda \in \Lambda$ y*

$$A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Y diremos que A es ***compacto*** *si cualquier cubierta abierta $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de A tiene una subcubierta finita, esto es, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \Lambda$ tales que*

$$A \subseteq U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \cdots \cup U_{\lambda_k}.$$

Noten que, en nuestro análisis, $\{B_{\delta_{\overline{x}}}(\overline{x})\}_{\overline{x}\in A}$ es una cubierta abierta de A, también $\{B_{\frac{\delta_{\overline{x}}}{2}}(\overline{x})\}_{\overline{x}\in A}$ es una cubierta abierta de A y lo mismo para $\{B_{\frac{\delta_{\overline{x}}}{3}}(\overline{x})\}_{\overline{x}\in A}$. ¿Entonces lo que pedíamos antes era que A fuera compacto? La respuesta es sí .

Regresando a nuestro análisis: Sean $\overline{x}, \overline{y} \in A$ tales que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$. Como $A \subseteq B_{\delta_{\overline{x}_1}}(\overline{x}_1) \cup B_{\delta_{\overline{x}_2}}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{\delta_{\overline{x}_k}}(\overline{x}_k)$ existe $i \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $\overline{x} \in B_{\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i)$. Entonces

$$\|\overline{y} - \overline{x}_i\| = \|\overline{y} - \overline{x} + \overline{x} - \overline{x}_i\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{x}_i\| < \delta + \delta_{\overline{x}_i} \leq 2\delta_{\overline{x}_i}$$

Esto muestra que $\overline{y} \in B_{2\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i)$, pero solo sabemos que $f(B_{\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(\overline{x}_i))$ (esto último es por la continuidad de f). Lo anterior nos motiva a redefinir δ. Entonces, suponiendo que

$$A \subseteq B_{\frac{\delta_{\overline{x}_1}}{2}}(\overline{x}_1) \cup B_{\frac{\delta_{\overline{x}_2}}{2}}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{\frac{\delta_{\overline{x}_k}}{2}}(\overline{x}_k) \text{ y que } \overline{x} \in B_{\frac{\delta_{\overline{x}_i}}{2}}(\overline{x}_i)$$

sea $\delta = \text{ínf}\left\{\ \dfrac{\delta_{\overline{x}_i}}{2} \mid i \in \{1, 2, ..., k\}\right\}$. Se tiene que

$$\|\overline{y} - \overline{x}_i\| = \|\overline{y} - \overline{x} + \overline{x} - \overline{x}_i\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{x}_i\| < \delta + \frac{\delta_{\overline{x}_i}}{2} \leq \delta_{\overline{x}_i}.$$

Esto es, $\overline{y} \in B_{\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i)$.

Todo lo anterior se puede resumir con la frase "Si dos puntos de A distan menos que δ entonces una de las siguientes bolas, $B_{\delta_{\overline{x}_1}}(\overline{x}_1)$, $B_{\delta_{\overline{x}_2}}(\overline{x}_2), ..., B_{\delta_{\overline{x}_k}}(\overline{x}_k)$, contiene a ambos".

Pero aún no vemos que el δ elegido funcione, es decir, que si $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$, entonces $\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| < \varepsilon$. Como $\overline{x}, \overline{y} \in B_{\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i)$ y $f(B_{\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(\overline{x}_i))$, entonces

$$\|f(\overline{x})-f(\overline{y})\| = \|f(\overline{x})-f(\overline{x}_i)+f(\overline{x}_i)-f(\overline{y})\| \leq \|f(\overline{x})-f(\overline{x}_i)\| + \|f(\overline{x}_i)-f(\overline{y})\| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Lo anterior nos motiva a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 8 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es compacto, entonces f es uniformemente continua en B.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en A, lo es en B, así que para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ y para cada $\overline{x} \in B$ existe $\delta_{\overline{x}} > 0$ tal que

$$f(B_{\delta_{\overline{x}}}(\overline{x}) \cap A) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(\overline{x})).$$

Note que $\mathscr{U} = \left\{B_{\frac{\delta_{\overline{x}}}{2}}(\overline{x})\right\}_{\overline{x}\in B}$ es una cubierta abierta de B y como B es compacto, existen $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k \in B$ tales que

$$B \subseteq B_{\frac{\delta_{\overline{x}_1}}{2}}(\overline{x}_1) \cup B_{\frac{\delta_{\overline{x}_2}}{2}}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{\frac{\delta_{\overline{x}_k}}{2}}(\overline{x}_k).$$

Sea $\delta = \text{mín}\left\{ \dfrac{\delta_{\overline{x}_i}}{2} \mid i \in \{1,2,...,k\}\right\}$. Por lo tanto, si $\|\overline{x}-\overline{y}\| < \delta$, existe $i \in \{1,2,...,k\}$ tal que $\overline{x}, \overline{y} \in B_{\delta_{\overline{x}_i}}(\overline{x}_i)$ y de aquí que

$$\|f(\overline{x})-f(\overline{y})\| \leq \|f(\overline{x})-f(\overline{x}_i)\| + \|f(\overline{x}_i)-f(\overline{y})\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lo que demuestra que f es uniformemente continua en B. ■

Ejemplo 9 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si A es un conjunto finito, entonces A es un conjunto compacto.*

Demostración. Supongamos que $A = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k\}$ y sea $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de A, es decir, cada U_λ es un conjunto abierto y $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ (debemos exhibir una subcubierta finita). Se tiene que para cada $\overline{x}_i$ existe $\lambda_i \in \Lambda$ tal que $\overline{x_i} \in U_{\lambda_i}$. Así, $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$. Por lo tanto, A es compacto. ■

Ahora, enunciaremos una observación que ocuparemos más adelante, para ello es necesario recordar que cualquier subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como la unión de bolas con centro en $\mathbb{Q}^n$ y radio racional (vea Ejercicio (7) de la Tarea 01). Por cierto ¿cuántas bolas con centro en $\mathbb{Q}^n$ y radio racional existen? Claro, tantas como racionales, es decir una cantidad numerable.

Observación 10 *Si $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathbb{R}^n$, entonces existen $\{\overline{x}_k\}$ y $\{r_k\}$ sucesiones de $\mathbb{Q}^n$ y $\mathbb{Q}$, respectivamente, tales que:*

(I) *Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $B_{r_k}(\overline{x}_k) \subseteq U_\lambda$ y*

(II) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\overline{x}_k) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$

También ocuparemos el siguiente ejercicio, cuya demostración anexaremos en un PDF extra.

Ejercicio 11 *Sea $\{A_k\}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, cerrados, acotados y no vacíos tales que $A_{k+1} \subseteq A_k$. Entonces*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \varnothing.$$

La definición de conjunto compacto no es muy intuitiva ni tan sencilla de manipular al momento de demostrar que un conjunto es compacto. Para nuestra suerte, en $\mathbb{R}^n$, tenemos una forma equivalente de describir a los conjuntos compactos.

Teorema 12 (Heine-Borel) *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Se tiene que K es un conjunto compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Mostremos primero que K es acotado, para ello consideremos para cada $k \in \mathbb{N}$, $B_k(\overline{0})$. Note que $\mathscr{U} = \{B_k(\overline{0})\}$ es una cubierta abierta de K, de hecho es una cubierta abierta de $\mathbb{R}^n$. Como K es compacto, existen números naturales $k_1 < k_2 < \cdots < k_l$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_{r_{k_i}}(\overline{0}_{k_i}) = B_{k_l}(\overline{0}).$$

Así, para cada elemento $\overline{x} \in K$ se tiene que $\|\overline{x}\| < k_l$. es decir, K es acotado.

Ahora, para ver que K es cerrado demostraremos que $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto. Para ello consideremos un elemento $\overline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus K$ y veamos que es un punto interior de $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos $\overline{B_{\frac{1}{k}}(\overline{x})}$. Note que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_{\frac{1}{k}}(\overline{x})} = \{\overline{x}\}.$$

Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} K &\subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{x}\} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_{\frac{1}{k}}(\overline{x})} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{k}}(\overline{x})}\right), \end{aligned}$$

donde $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{k}}(\overline{x})}$ es un conjunto abierto, para cada $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\left\{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{k}}(\overline{x})}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $k_1 < k_2 < \cdots < k_l$ números naturales tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{k_i}}(\overline{x})}\right) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{k_l}}(\overline{x})}.$$

De lo anterior se sigue que $\overline{x} \in B_{\frac{1}{k_l}}(\overline{x}) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{k_l}}(\overline{x})} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$. Esto es, $\overline{x}$ es un punto interior de $\mathbb{R}^n \setminus K$.

$\Leftarrow\rfloor$ Para esta implicación supondremos que K es cerrado y acotado, pero no compacto. Como K no es compacto, existe $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta de K que no tiene subcubiertas finitas. Por la Observación 10, existen $\{\overline{x}_k\}$ y $\{r_k\}$ sucesiones en $\mathbb{Q}^n$ y $\mathbb{Q}$, respectivamente, tales que

(I) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $B_{r_k}(\overline{x}_k) \subseteq U_\lambda$ y

(II) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\overline{x}_k) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

Note que, por (II), $\mathscr{V} = \{B_{r_k}(\overline{x}_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de K y, por (I), $\mathscr{V}$ no tiene subcubiertas finitas (si $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_{r_{k_i}}(\overline{x}_{k_i})$, entonces $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$, es decir, tendríamos una subcubierta finita de $\mathscr{U}$).

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$A_k = \big(\mathbb{R}^n \setminus (B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k))\big) \cap K.$$

Note lo siguiente:

1. $A_k \neq \varnothing$, para toda $k \in \mathbb{N}$. En caso contrario $K \subseteq (B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k))$ contradiciendo que $\mathscr{V}$ no tiene subcubiertas finitas.
2. $A_{k+1} \subseteq A_k$, para toda $k \in \mathbb{N}$, pues $B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k) \subseteq B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k) \cup B_{r_{k+1}}(\overline{x}_{k+1})$.
3. A_k es cerrado, pues es intersección de conjuntos cerrados, y acotado, pues está contenido en K que es acotado, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Note que los conjuntos que acabamos de definir justo cumplen las condiciones del Ejercicio 11. Así,

$$\begin{aligned}
\varnothing &\neq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{R}^n \setminus (B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k))\big) \cap K \\
&= \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{R}^n \setminus (B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k))\big)\right) \cap K \\
&= \left(\mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_{r_1}(\overline{x}_1) \cup B_{r_2}(\overline{x}_2) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\overline{x}_k))\Big)\right) \cap K \\
&= \left(\mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\overline{x}_k)\Big)\right) \cap K.
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathscr{V}$ es cubierta abierta de K, es decir,

$$K \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\overline{x}_k),$$

de donde

$$K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\overline{x}_k)\Big)\right) = \varnothing.$$

Lo que es una contradicción. Así que K es compacto. ■

Ejemplo 13 *Note que por el teorema anterior cualquier rectángulo cerrado R, en $\mathbb{R}^n$, es compacto. En particular los intervalos $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ son conjuntos compactos.*

Dado el teorema anterior podemos enunciar el último teorema fuerte de continuidad utilizando el concepto de conjunto compacto.

Teorema 14 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es un conjunto compacto, entonces $f(B)$ es un conjunto compacto.*

Terminamos esta sesión con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15 *Para cada $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que el segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$ es compacto, pues $[\overline{x}, \overline{y}] = f([0,1])$, donde $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está dada por $f(t) = \overline{x} + t(\overline{y} - \overline{x})$. Es decir, $[\overline{x}, \overline{y}]$ es compacto porque es la imagen bajo una función continua del conjunto compacto $[0,1]$.*