Ejercicio extra

El siguiente ejercicio es utilizado en la Clase 24 y aunque no es un ejercicio de este capítulo en este documento anexamos su demostración.

Intersección de familia anidada de cerrados, acotados y no vacíos

Ejercicio 1 Sea $\{A_k\}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados, acotados y no vacíos tales que $A_{k+1} \subset A_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$ (es una familia de conjuntos anidados). Entonces

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset.$$

¿El resultado es cierto si los conjuntos no son cerrados o no son acotados?

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A_k \supsetneq A_{k+1}$ (en caso necesario, o bien se eliminan los conjuntos que sean igual y se reenumera, o bien la sucesión se estaciona y la intersección es alguno de los conjuntos A_k).

Inductivamente construimos $\bar{x}_k \in A_k \setminus A_{k+1}$. Como la familia es anidada, $B_1 = \{\bar{x}_k\} \subset A_1$ y, por construcción, B_1 es un conjunto infinito. Como A_1 es cerrado y acotado, por el Ejercicio (10) de la Tarea 01, se obtiene que $B'_1 \cap A_1 \neq \emptyset$. En virtud de lo anterior, sea $\bar{x}_0 \in B'_1 \cap A_1$.

Afirmamos que $\bar{x}_0 \in A_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Para mostrarlo, definimos $B_k = B_1 \setminus \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}\}$ para $k \geq 2$. Notamos que $\bar{x}_0 \in B'_k$ porque como $\dot{B}_r(\bar{x}_0) \cap B_1$ es infinito, por lo cual al quitar una cantidad finita de puntos dicha condición no cambia, esto es, obtenemos que $\dot{B}_r(\bar{x}_0) \cap B_k \neq \emptyset$. Como $B_k \subset A_k$ y A_k es cerrado, entonces $\bar{x}_0 \in A_k$. Esto prueba lo deseado.

Respecto a la pregunta, el resultado es falso en ambos casos. Notemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ y también que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, \infty) = \emptyset$. ■