Addendum 01
Límites laterales para funciones con codominio en $\mathbb{R}^m$

Definición 1. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una función, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\overline{\ell} \in \mathbb{R}^m$.

(i). Si existe $\eta > 0$ tal que $(x_0, x_0 + \eta) \subseteq A$, decimos que el *límite por la derecha* de f cuando x se aproxima a x_0 es $\overline{\ell}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, x_0 + \eta)$ cumple que $0 < x - x_0 < \delta$, entonces $\|f(x) - \overline{\ell}\| < \varepsilon$. En este caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \overline{\ell}.$$

(ii). Si existe $\eta > 0$ tal que $(x_0 - \eta, x_0) \subseteq A$, decimos que el *límite por la izquierda* de f cuando x se aproxima a x_0 es $\overline{\ell}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \eta, x_0)$ cumple que $0 < x_0 - x < \delta$, entonces $\|f(x) - \overline{\ell}\| < \varepsilon$. En este caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \overline{\ell}.$$

Observación 2. En la definición anterior, note que si existe el intervalo indicado en cada caso, entonces $x_0 \in A'$. Sin embargo, ya que puede ocurrir que $m = 1$, debemos recuperar dicha definición, y en ella se pide que exista todo un intervalo (en la dirección adecuada) para la existencia del límite lateral, y el pedir únicamente que $x_0 \in A'$ no nos permite asegurar la existencia de dicho intervalo (por ejemplo, podría ocurrir que únicamente nos acerquemos a x_0 por la derecha mediante la sucesión $\{x_0 + 1/n\}$).

En virtud de lo dicho anteriormente es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 3. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\overline{\ell} \in \mathbb{R}^m$. Si existe $\eta > 0$ tal que $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq A$, se cumple que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \overline{\ell} \text{ si y sólo si } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \overline{\ell} \text{ y } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \overline{l}.$$