Ayudantía 20
Ejemplos de parametrizaciones

En esta sesión daremos algunos ejemplos de parametrizaciones.

Ejemplo 1. Sea $r > 0$. Consideremos la función $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)) \,. \tag{1}$$

Entonces γ es una parametrización de $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ la circunferencia de radio r.

Demostración. En primer lugar veamos que $\gamma([0,2\pi)) \subset \mathscr{C}$. Sea $t \in [0,2\pi)$, entonces las coordenadas de $\gamma(t)$ cumplen que

$$(r\cos(t))^2 + (r\,\mathrm{sen}(t))^2 = r^2\left(\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t)\right) = r^2,$$

lo cual implica que $\gamma(t) \in \mathscr{C}$.

Ahora, veamos que $\mathscr{C} \subset \gamma([0,2\pi))$. Sea $(x,y) \in \mathscr{C}$. Si $x = 0$ proponemos $t = \frac{\pi}{2}$ si $y = r$, o $t = \frac{3\pi}{2}$ si $y = -r$. Ahora, supongamos que $x \neq 0$. Si $x > 0$ consideremos $\arctan(\frac{y}{x})$. Recordamos que $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ por lo cual debemos hacer algunas observaciones. Si $\arctan(\frac{y}{x}) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, tomamos $t = \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, mientras que si $\arctan(\frac{y}{x}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, basta considerar $t = \arctan(\frac{y}{x})$. En ambos casos, por la periodicidad de las funciones seno y coseno, obtenemos que

$$\gamma(t) = \left(r\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right), r\,\mathrm{sen}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right). \tag{2}$$

Para simplificar la ecuación (2) recordamos que si $z \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathrm{sen}\left(\arctan(z)\right) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

y

$$\cos\left(\arctan(z)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Luego, al sustituir en (2) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(r\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}, r\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}\right)\\
&= \left(r\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, r\frac{|x|\frac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= (x,y), \qquad (3)
\end{aligned}$$

donde (3) se obtiene porque $(x,y) \in \mathscr{C}$, es decir, $x^2 + y^2 = r^2$. Note que en la simplificación de la ecuación (3) se usó que $\sqrt{x^2} = |x| = x$ porque $x > 0$.

Para continuar, si $x < 0$ proponemos $t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Entonces

$$\gamma(t) = \left(r\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\right), r\,\mathrm{sen}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-r\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}, -r\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}\right)\\
&= \left(r\frac{-|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, r\frac{-|x|\frac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= (x,y). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Note que para obtener (4) hemos usado que para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen}(z)$$

y también que

$$\cos(z+\pi) = -\cos(z).$$

Además, como suponemos que $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Esto termina la prueba de que $\mathscr{C} \subset \gamma([0,2\pi))$. Por lo tanto, γ es una parametrización de $\mathscr{C}$. ■

Ejemplo 2. Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ la recta cuya ecuación cartesiana es

$$ax + by + c = 0, \qquad (5)$$

con $a^2 + b^2 > 0$. Entonces:

(i). Si $\overline{x}_0 = (x_0, y_0)$ y $\overline{x}_1 = (x_1, y_1)$ son dos puntos distintos de R, entonces la función $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma_1(t) = \overline{x}_0 + t(\overline{x}_1 - \overline{x}_0) \qquad (6)$$

es una parametrización de R.

(ii). Si $\overline{x}_0 = (x_0, y_0) \in R$ y $\overline{u} = (u_1, u_2) \neq (0,0)$ es paralelo a la recta R, esto es, $au_1 + bu_2 = 0$, entonces la función $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma_2(t) = \overline{x}_0 + t\overline{u} \qquad (7)$$

es una parametrización de R.

Demostración. (i) Primero veamos que $\gamma_1(\mathbb{R}) \subset R$. Para ello, si $t \in \mathbb{R}$, notemos que

$$\gamma_1(t) = (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)).$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
a(x_0 + t(x_1 - x_0)) + b(y_0 + t(y_1 - y_0)) + c &= c + (1-t)(ax_0 + by_0) + t(ax_1 + by_1)\\
&= c + (1-t)(-c) + t(-c) = 0
\end{aligned}
$$

donde la segunda igualdad se cumple porque $\overline{x}_0, \overline{x}_1 \in R$, esto es, satisfacen la ecuación (5). Por lo tanto, $\gamma_1(t) \in R$.

A continuación veamos que $R \subset \gamma_1(\mathbb{R})$. Para esto, sea $(x,y) \in R$, esto es, supongamos que $ax + by + c = 0$. Ya que $a^2 + b^2 > 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \neq 0$ (en caso necesario, consideramos b). Ya que por hipótesis se cumple que $\overline{x}_0 \neq \overline{x}_1$, también podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 \neq x_1$ (si esto no ocurre, entonces $y_0 \neq y_1$). Luego, $x_1 - x_0 \neq 0$. Proponemos $t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. Entonces

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) \\ &= \left(x, y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Ya que $\overline{x}_1, \overline{x}_0 \in R$, entonces ambos puntos satisfacen la ecuación (5), por lo cual

$$(ax_1 + by_1 + c) - (ax_0 + by_0 + c) = 0,$$

de donde

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0,$$

lo cual implica que

$$x_1 - x_0 = -\frac{b}{a}(y_1 - y_0). \tag{9}$$

Note que para obtener la ecuación anterior usamos que $a \neq 0$. De manera análoga, como $(x, y) \in R$, obtenemos que

$$x - x_0 = -\frac{b}{a}(y - y_0). \tag{10}$$

A partir de las ecuaciones (9) y (10) obtenemos que

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{11}$$

Finalmente, al sustituir la ecuación (11) en la ecuación (8) obtenemos que

$$\gamma_1(t) = (x, y).$$

Esto prueba lo deseado.

((ii)) Empecemos mostrando que $\gamma_2(\mathbb{R}) \subset R$. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\gamma_2(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2),$$

luego,

$$a(x_0 + tu_1) + b(y_0 + tu_2) + c = ax_0 + by_0 + c + t(au_1 + bu_2) = 0$$

porque $\overline{x}_0$ cumple la ecuación (5) y $\overline{u}$ es paralelo a R. Por lo anterior, $\gamma_2(t) \in R$.

Para terminar veamos que $R \subset \gamma_2(\mathbb{R})$. Sea $(x, y) \in R$. Entonces $ax + by + c = 0$. Como $\overline{u} \neq (0, 0)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u_1 \neq 0$ (de otra manera, $u_2 \neq 0$). Proponemos $t = \dfrac{x - x_0}{u_1}$. Entonces

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) \\ &= \left(x, y_0 + \frac{x - x_0}{u_1}u_2\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Como se hizo en el inciso (i) anterior, sin pérdida de generalidad supongamos que $a \neq 0$. Ya que $au_1 + bu_2 = 0$, obtenemos que

$$u_1 = -\frac{b}{a}u_2. \tag{13}$$

Luego, en virtud de las ecuaciones (10) y (13) obtenemos que

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}. \tag{14}$$

Así, al sustituir la ecuación (14) en la ecuación (12) obtenemos que

$$\gamma_2(t) = (x, y).$$

Esto termina la prueba. ∎

Pregunta 3. *¿Qué pasa si en el Ejemplo 2 se tiene que $a \neq 0$ y $b = 0$? ¿Y si $a = 0$ y $b \neq 0$? Observe que en algunas de las ecuaciones se usó implícitamente que $b \neq 0$, ¿en cuáles de ellas se hizo esto?*

Ejemplo 4. Sobre la parte exterior de una circunferencia fija de radio a rueda, sin resbalar, otra circunferencia de radio b. Encuentre una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que describa el movimiento de un punto que se encuentre en la circunferencia exterior.

Solución. Para este problema, lo que haremos será agregar algunas hipótesis que nos permitan analizar el problema. En primer lugar, supongamos que la circunferencia fija de radio a está centrada en $O = (0, 0)$ el origen del plano cartesiano y la denotaremos por $\mathscr{C}_1$. Ahora, nuestra circunferencia que se mueve depende de un parámetro que llamaremos θ (más adelante se verá que es un ángulo), y así, en cada momento θ, su centro será A_θ y la denotaremos por $\mathscr{C}_2^\theta$.

Observación. Notamos que para toda $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple que O, A_θ y el punto de tangencia de las dos circunferencias son colineales, lo cual significa que la distancia entre O y A_θ siempre es $a + b$ (la suma de los radios). Por lo anterior, A_θ siempre está en la circunferencia de radio $a + b$ con centro en el origen, es decir, por el Ejemplo 1, la posición de A_θ está dada por la parametrización

$$A_\theta = ((a + b)\cos(\theta), (a + b)\operatorname{sen}(\theta)). \tag{15}$$

∎

Sea P el punto que está en la circunferencia exterior. Ya que nos interesa determinar su posición en cada momento (conforme se mueve $\mathscr{C}_2^\theta$), tenemos que $P = P_\theta$.

Ahora, sea φ el ángulo $\angle P_\theta A_\theta O$, el cual es el ángulo entre el radio $\overline{A_\theta P_\theta}$ y el segmento $\overline{A_\theta O}$ (que contiene al punto de tangencia de las dos circunferencias). Observamos que φ depende del ángulo θ porque la longitud de los arcos en que las circunferencias han estado en contacto es la misma, así que

$$a\theta = b\varphi$$

ya que la longitud del arco es directamente proporcional al ángulo (recuerde que medimos ángulos en radianes). A partir de lo anterior obtenemos que

$$\varphi = \frac{a\theta}{b}. \tag{16}$$

Ya que P_θ es un punto de la circunferencia $\mathscr{C}_2^\theta$, en virtud del Ejemplo 1, salvo hacer una traslación adecuada (que será nuestro paso final), se cumple que podemos parametrizar P_θ como

$$P_\theta = (b\cos(\beta), b\operatorname{sen}(\beta)). \tag{17}$$

Por construcción (vea la Figura 1) se cumple que

$$\beta = \theta + \pi + \varphi,$$

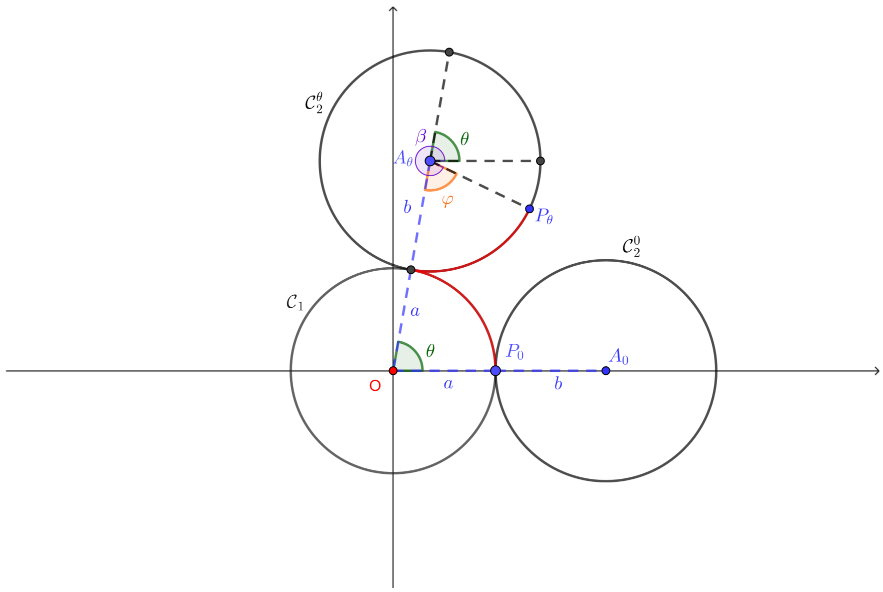

Figura 1: Construcción de P_θ

es decir, por la ecuación (16),

$$\beta = \pi + \theta + \frac{a\theta}{b} = \pi + \frac{(a+b)\theta}{b}. \tag{18}$$

Luego,

$$\cos(\beta) = -\cos\left(\frac{(a+b)\theta}{b}\right) \tag{19}$$

y

$$\operatorname{sen}(\beta) = -\operatorname{sen}\left(\frac{(a+b)\theta}{b}\right). \tag{20}$$

Para continuar, notemos que para obtener la posición de P_θ basta con trasladar (17), que geométricamente se interpreta como trasladar el centro de la circunferencia $\mathscr{C}_2^\theta$ a la posición que se describe en (15), esto es, la posición real de P_θ está determinada por

$$P_\theta = A_\theta + (b\cos(\beta), b\operatorname{sen}(\beta)),$$

que, en virtud de las ecuaciones (15), (19) y (20), nos lleva a

$$P_\theta = \left((a+b)\cos(\theta) - \cos\left(\frac{(a+b)\theta}{b}\right), (a+b)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}\left(\frac{(a+b)\theta}{b}\right)\right). \tag{21}$$

Finalmente, proponemos $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(\theta) = \left((a+b)\cos(\theta) - \cos\left(\frac{(a+b)\theta}{b}\right), (a+b)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}\left(\frac{(a+b)\theta}{b}\right)\right),$$

y observamos que, por la construcción anterior, γ es una parametrización de la trayectoria pedida en el enunciado.