Ayudantía 21
Algunas propiedades de la derivada

Iniciamos esta sesión con un resultado que, como pueden recordar, es similar a un hecho que conocen de Cálculo I: algunas equivalencias de que una función sea derivable en un punto.

Teorema 1. *Sean $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, con I un intervalo abierto, y $t_0 \in I$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i). La función γ es derivable en t_0.

(ii). Existe un vector $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l})}{t - t_0} = \bar{0}.$$

(iii). Existe una función lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} = \bar{0}.$$

Demostración. **(i) implica (ii)].** Supongamos que γ es derivable en t_0. Entonces existe

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Consideremos $\bar{l} = \gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^m$. Ahora, notemos que si $t \in I$ cumple que $t \neq t_0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t) - \big(\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l}\big)}{t - t_0} &= \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - (t - t_0)\bar{l}}{t - t_0} \\ &= \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \frac{(t - t_0)\bar{l}}{t - t_0} \\ &= \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \bar{l}. \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, a partir de la ecuación (2), al calcular el límite deseado obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \big(\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l}\big)}{t - t_0} &= \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \bar{l} \right) \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \lim_{t \to t_0} \bar{l} \qquad (3) \\ &= \gamma'(t_0) - \gamma'(t_0) = \bar{0}, \qquad (4) \end{aligned}$$

donde la igualdad (3) se obtiene porque ambos límites existen (uno es el límite de una función constante) y (4) se sigue por la ecuación (1) y la definición de $\bar{l}$. Esto prueba (ii).

(ii) implica (iii)]. Supongamos que existe $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l})}{t - t_0} = \bar{0}. \tag{5}$$

Definimos la función lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ al considerar $L(1) = \bar{l}$ y extender linealmente (note que $\{1\}$ es una base de $\mathbb{R}$), es decir, $L(t) = L(t \cdot 1) = tL(1) = t\bar{l}$. Veamos que L cumple lo pedido en (iii). Observamos que si $t \neq t_0$ entonces

$$\frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} = \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)L(1))}{t - t_0} \tag{6}$$

$$= \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l})}{t - t_0}, \tag{7}$$

donde (6) se obtiene porque L es lineal y (7) se cumple por la definición de $L(1)$. Finalmente, en virtud de (5) y (7) obtenemos que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l})}{t - t_0} = \bar{0}.$$

Esto prueba (iii).

(iii) implica (i)]. Supongamos que existe una función lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} = \bar{0}. \tag{8}$$

Veamos que $\gamma'(t_0) = L(1)$, esto es, demostremos que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = L(1). \tag{9}$$

Notamos que

$$\lim_{t \to t_0} L(1) = L(1) \tag{10}$$

porque se trata de una función constante (con valor $L(1)$). Entonces al sumar (10) con (8) obtenemos que

$$\begin{aligned} L(1) + \bar{0} &= \lim_{t \to t_0} L(1) + \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \left(L(1) + \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} \right) \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)L(1) + \gamma(t) - (\gamma(t_0) + L(t - t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{L(t - t_0) + \gamma(t) - \gamma(t_0) - L(t - t_0)}{t - t_0} \qquad (11) \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}, \end{aligned}$$

donde (11) se obtiene porque L es lineal. Esta cadena de igualdades demuestra que (9) se cumple y, por lo tanto, se satisface (i). ■

Antes de continuar hagamos algunas observaciones. En primer lugar, ¿a qué le recuerda el límite dado en el inciso (ii) del Teorema 1? Ya que $\bar{l} = \gamma'(t_0)$, tenemos que

$$\gamma(t_0) + (t - t_0)\bar{l} = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0),$$

así, al revisar la **Definición 4** de la **Clase 26**, notamos que es una parametrización la recta tangente a $\mathscr{C} = \gamma(I)$ en el punto $\gamma(t_0)$ (¿se da cuenta de por qué lo es?). Por lo anterior, el límite se puede interpretar geométricamente como sigue: la *recta tangente* en un punto dado $\gamma(t_0)$ de $\mathscr{C}$ es una "buena aproximación" a $\mathscr{C}$ para valores cercanos a t_0, o dicho de otra forma, localmente la recta tangente y $\mathscr{C}$ son *parecidos*.

También, ¿qué lugar geométrico representa el conjunto

$$\mathscr{L} = \{\gamma(t_0) + L(t - t_0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

donde L es la función lineal que aparece en el inciso (iii) del Teorema 1? Si lo comparamos lo dicho en el párafo anterior, es claro que $\mathscr{L}$ es la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\gamma(t_0)$ (como se dijo antes, usted debería ser capaz de demostrarlo).

Recordamos de nuestro curso de Cálculo I que uno de los primeros resultados que se demuestra luego de conocer el concepto de derivada es el llamado *Teorema del valor medio* y a continuación haremos uso de él para resolver un problema.

Ejercicio 2. *Sea $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Entonces que existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2 = (b-a)\gamma'(\xi) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)).$$

Antes de dar la demostración, note que la hipótesis γ *es derivable en el intervalo* (a,b) significa, como ya puede imaginar, que γ es derivable en t para toda $t \in (a,b)$.

Demostración. Definimos la función $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(t) = \gamma(t) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a))$. Observamos que f es una función continua en $[a,b]$ porque γ lo es. Además, como γ y la función constante $g(t) = \gamma(b) - \gamma(a)$ son derivables en (a,b), obtenemos que f es derivable en (a,b) ytambién para toda $t \in (a,b)$ se cumple que

$$f'(t) = \gamma(t) \cdot g'(t) + \gamma'(t) \cdot g(t) = \gamma'(t) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)), \tag{12}$$

porque $g'(t) = \overline{0}$ ya que g es una función constante (¿puede demostrar este hecho?). Observamos que f satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio (¿recuerda su enunciado completo?), por lo cual existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{13}$$

Ya que

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \gamma(b) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) - \gamma(a) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) \\ &= (\gamma(b) - \gamma(a)) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) \\ &= \|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2, \end{aligned} \tag{14}$$

al sustituir (12) y (14) en (13) obtenemos que

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2 = (b-a)\gamma'(\xi) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)).$$

Esto termina la prueba. ∎

Para concluir esta sesión, recordamos que una vez que se aprendió a derivar en Cálculo 1, una de sus primeras aplicaciones fue el distinguir cuando una función tenía derivada cero y, sin herramientas de cálculo integral, uno fue capaz de dar una forma explícita de funciones cuya segunda derivada fuera nula. El siguiente ejercicio recupera ese trabajo. Antes de enunciarlo daremos algunas precisiones.

Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, con I un intervalo abierto, una función derivable en I. Entonces, para toda $t \in I$ existe $\gamma'(t)$, lo cual define inmediatamente una función $\gamma' : I \to \mathbb{R}^m$. Note que si γ' resulta ser derivable en I, entonces se puede definir la *segunda derivada* γ'' de la función γ (en cada punto) como uno lo imagina: es la derivada de la función derivada γ' (en cada punto). Sea cuidadoso cuando utilice estos términos: la definición de derivada es puntual y depende, además de un punto, de una función bien definida. Ahora, pasamos al problema que nos interesa.

Ejercicio 3. *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, donde I es un intervalo abierto.*

(i). Si existen $\overline{x}_0, \overline{u} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\gamma(t) = \overline{x}_0 + t\overline{u}$ para toda $t \in I$, entonces $\|\gamma'(t)\|$ es constante.

(ii). Muestre que el recíproco de la afirmación anterior es falso.

(iii). Si existen $\overline{x}_0, \overline{u} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\gamma(t) = \overline{x}_0 + t\overline{u}$ para toda $t \in I$, entonces $\gamma''(t) = \overline{0}$ para toda $t \in I$.

(iv). Si $\gamma''(t) = \overline{0}$ para toda $t \in I$, se cumple que existen $\overline{x}_0, \overline{u} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\gamma(t) = \overline{x}_0 + t\overline{u}$ para toda $t \in I$.

(v). Dé un ejemplo en el cual la función γ parametrice una recta y se satisfaga que $\gamma''(t) \neq \overline{0}$ para toda $t \in I$.

Demostración. (i) Supongamos que existen $\overline{x}_0, \overline{u} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\gamma(t) = \overline{x}_0 + t\overline{u}$ para toda $t \in I$. Entonces, $\gamma'(t) = \overline{u}$ para toda $t \in I$ (estamos usando la Proposición 4 de la Clase 08). Por lo tanto, $\|\gamma'(t)\| = \|\overline{u}\|$ para toda $t \in I$, es decir, $\|\gamma'(t)\|$ es constante. Esto prueba lo deseado.

(ii) Consideremos la función $\gamma_0 : (0, 3\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma_0(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Notamos que γ_0 es una parametrización de la circunferencia unitaria (¿puede demostrarlo?), así que no existen $\overline{x}_0, \overline{u} \in \mathbb{R}^2$ que cumplan lo dicho en el inciso (i) ya que ello significaría que γ_0 parametriza una recta lo cual no ocurre. Para concluir, notamos que para toda $t \in (0, 3\pi)$ se cumple que

$$\gamma_0'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)),$$

de donde se obtiene que $\|\gamma_0'(t)\| = 1$ para toda $t \in (0, 3\pi)$, es decir, $\|\gamma_0'\|$ es constante pero no se cumple (i).

(iii) Ya vimos en el inciso (i) que $\gamma'(t) = \overline{u}$, por lo cual γ' es una función constante, lo cual implica que $\gamma''(t) = \overline{0}$ para toda $t \in I$.

(iv) Supongamos que $\gamma''(t) = \overline{0}$ para toda $t \in I$. Como ya imaginará, con la herramienta actual no es posible "integrar" una función que tenga codominio $\mathbb{R}^m$, por lo cual recurriremos a nuestros conocimientos previos. Supongamos que $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, entonces $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_m'(t))$ y $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \ldots, \gamma_m''(t))$ para toda $t \in I$. Usaremos los siguientes resultados de Cálculo I (ambos son corolarios del Teorema del Valor Medio).

Lema 4. *Sea $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con J un intervalo abierto, una función tal que $f'(t) = 0$ para toda $t \in J$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = c$ para toda $t \in J$.*

Lema 5. *Sean $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con J un intervalo abierto, funciones tales que $f'(t) = g'(t)$ para toda $t \in J$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) - g(t) = k$ para toda $t \in J$.*

Así, $\gamma_i'(t) = c_i$ para toda $t \in I$, con $c_i \in \mathbb{R}$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, en virtud del Lema 4. Ahora, si consideramos la función $f_i(t) = tc_i$, notamos que $f_i'(t) = \gamma_i'(t)$ para toda $t \in I$, entonces, por el Lema 5, existe $k_i \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_i(t) = k_i + f_i(t) = k_i + tc_i$ para toda $t \in I$. Por lo tanto, basta proponer $\overline{x}_0 = (k_1, \ldots, k_n)$ y $\overline{u} = (c_1, \ldots, c_n)$. Esto termina la prueba.

(v) Consideremos $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (t^2, t^2)$, que es una parametrización de la recta $\mathscr{L} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (demuéstrelo). Por definición tenemos que $\gamma'(t) = (2t, 2t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y, por ello, $\gamma''(t) = (2, 2)$. Esta parametrización cumple lo pedido. ∎