Ayudantía 22
Rapidez y velocidad

En esta sesión daremos una interpretación al concepto principal de estas sesiones: las parametrizaciones. Para ello, recordamos que de manera usual utilizamos *velocidad* como sinónimo de *rapidez*, aunque la primera palabra la entenderemos como un *vector* (esto es, un elemento de $\mathbb{R}^m$) y la segunda será la magnitud de dicho vector. A continuación dicha discusión.

Decimos que la función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, con I un intervalo, define una trayectoria en $\mathbb{R}^m$. Si γ es derivable en $t_0 \in I$, entonces $\gamma'(t_0)$ es la *velocidad* de γ al tiempo t_0 y a su magnitud $\|\gamma'(t_0)\|$ le llamamos la *rapidez* de la trayectoria al tiempo t_0.

Antes de continuar, notemos que lo dicho en el párrafo anterior no cambia ninguno de los conceptos que hasta ahora se han estudiado, sino que refiere a otras palabras que también son utilizadas para referirse a estos conceptos. Como podrá imaginar, el uso de estas palabras proviene principalmente de dar solución a problemas de Física. Lo anterior se torna evidente cuando hablamos de estudiar el comportamiento al *tiempo* t_0, esto es, estamos pensando que el fenómeno que nos interesa cambia con el tiempo, por lo cual, los valores considerados en I se están interpretando como los instantes en los que va cambiando el fenómeno que estudiamos. En particular, estamos interesados en los siguientes problemas:

(i). Considere una partícula (puntual) que se mueve en $\mathbb{R}^m$ según la trayectoria descrita por una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Supongamos además que γ es derivable en I. Nos interesa saber cuál es la *velocidad de escape* al tiempo t_0 de la partícula, esto es, consideremos que al tiempo t_0 la partícula dejara de seguir la trayectoria indicada por γ, ¿qué "camino" seguiría a partir de ese momento?, ¿con qué rapidez escaparía?

(ii). Suponga que conoce la rapidez de una partícula durante un periodo descrito por $I \subset \mathbb{R}$, esto es, para cada $t \in I$ se conoce el valor de $\|\gamma'(t)\|$, donde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es una función desconocida. ¿Qué información acerca de γ se puede obtener a partir de conocer la rapidez? Es decir, ¿es posible conocer la posición de la partícula en cada instante?

Estos problemas no son menores y tienen aplicaciones en la vida cotidiana. Por ejemplo, responder el primer problema ayuda a mejorar las marcas de los atletas de lanzamiento de martillo, mientras que resolver el segundo problema puede ayudar a determinar por qué ocurrió un accidente de tránsito.

Contrario a lo que podría pensar, ya hemos estudiado un poco ambos problemas: revise el **Ejercicio 3** de la **Ayudantía 21**. En particular, ¿puede interpretar los primeros dos incisos de dicho ejercicio en términos de velocidad y rapidez? Ahora hagamos algunos comentarios adicionales acerca de dichos problemas. Respecto al problema (i) notemos que dicha velocidad de escape es, por defición, el vector director de la recta tangente a $\gamma(I)$ en $\gamma(t_0)$, así que la partícula escapará justamente en dicha dirección y lo hará exactamente sobre dicha recta tangente con rapidez constante igual a $\|\gamma'(t_0)\|$. Esto resuelve totalmente el problema (i). El problema es más difícil como ya lo vio en el mencionado Ejercicio 3 de la sesión anterior (por ello es importante que haga la interpretación), en particular, note que si además conocemos información acerca de la *aceleración* (esto es, la segunda derivada) de la partícula, podemos decir un poco más acerca de las propiedades de γ(esta vez, interprete los incisos (iii), (iv) y (v) del Ejercicio 3 de la Ayudantía 21), sin embargo, en general es un problema muy complicado de resolver si no se dispone de información adicional.

Ejemplo 1. Muestre que la trayectoria descrita por la función $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(2t), 2\operatorname{sen}^2(t), 2\cos(t))$, con $t \in \mathbb{R}$, pertenece a una esfera con centro en el origen. Calcule su rapidez y muestre que la proyección en el plano XY de su velocidad tiene norma constante.

Demostración. Para ver que la trayectoria está contenida en una esfera basta con probar que $\gamma(t)$ cumple la ecuación de una esfera para toda $t \in \mathbb{R}$. Así, sea $t \in \mathbb{R}$, entonces las coordenadas de $\gamma(t)$ cumple que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(2t) + (2\operatorname{sen}^2(t))^2 + (2\cos(t))^2 &= (2\operatorname{sen}(t)\cos(t))^2 + 4\operatorname{sen}^4(t) + 4\cos^2(t)\\
&= 4\operatorname{sen}^2(t)\cos^2(t) + 4\operatorname{sen}^4(t) + 4\cos^2(t)\\
&= 4\operatorname{sen}^2(t)(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)) + 4\cos^2(t)\\
&= 4\operatorname{sen}^2(t) + 4\cos^2(t)\\
&= 4 = 2^2.
\end{aligned}$$

Por lo cual, $\gamma(t)$ está en la esfera de centro en el origen y radio 2 porque cumple la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$. Esto prueba la primera parte. Ahora, calculamos la velocidad de γ al tiempo t, esto es, obtenemos la derivada en cada punto:

$$\gamma'(t) = (2\cos(2t), 4\operatorname{sen}(t)\cos(t), -2\operatorname{sen}(t)) = (2\cos(2t), 2\operatorname{sen}(2t), -2\operatorname{sen}(t))\,.$$

Por lo tanto, la rapidez de γ en cada punto es

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\cos^2(2t) + 4\operatorname{sen}^2(2t) + 4\operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{4 + 4\operatorname{sen}^2(t)} = 2\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(t)}.$$

Para terminar, vemos que la proyección de la velocidad de γ en el plano XY en cada $t \in \mathbb{R}$ es $\beta(t) = (2\cos(2t), 2\operatorname{sen}(2t))$, y por lo tanto

$$\|\beta(t)\| = \sqrt{4\cos^2(2t) + 4\operatorname{sen}^2(2t)} = \sqrt{4} = 2,$$

es decir, la norma de la proyección de la velocidad es constante (igual a 2). ■

Ejemplo 2. Una partícula gira, en el sentido de las manecillas del reloj, sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio R con rapidez constante v. Si dicha partícula se desprende de la circunferencia en el punto $\left(\frac{-R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$, ¿en qué punto y en cuánto tiempo intersecta al eje Y? ¿Cuál debería ser la rapidez de la partícula sobre la circunferencia para que alcance el mismo punto en la mitad de tiempo?

Demostración. En primer lugar, recordamos que $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\operatorname{sen}(t))$$

es una parametrización de la circunferencia de radio R. Sin embargo, es una parametrización en sentido contrario a las manecillas del reloj, ya que $\gamma(0) = (R, 0)$, $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ y $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, R)$. Además, su rapidez es constante, pero $\|\gamma'(t)\| = R$ para toda $t \in [0, 2\pi]$. Entonces, lo primero que haremos será cambiar la velocidad para que sea igual a $v \neq 0$ (note que si la rapidez es igual a cero, entonces no hay desplazamiento). Para ello, notamos que si consideramos $\gamma_1 : \left[0, \dfrac{2R\pi}{v}\right] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma_1(t) = \left(R\cos\left(\frac{v}{R}t\right), R\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{R}t\right)\right),$$

entonces γ_1 también es una parametrización de la circunferencia con centro en el origen y radio R, y además

$$\|\gamma_1'(t)\| = \left\|\left(-v\,\mathrm{sen}\left(\frac{v}{R}t\right), v\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right)\right\| = v.$$

Observe que la parametrización γ_1 es inyectiva salvo para $t = 0$ y $t = \dfrac{2R\pi}{v}$ (demuéstrelo). Note que esta parametrización sigue teniendo el sentido contrario a las manecillas del reloj. Para obtener la parametrización en el sentido de las manecillas del reloj nos basta con "recorrer el intervalo al revés", para ello, basta considerar $\widetilde{\gamma} : \left[0, \dfrac{2R\pi}{v}\right] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\widetilde{\gamma}(t) = \left(R\cos\left(2\pi - \frac{v}{R}t\right), R\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{v}{R}t\right)\right). \tag{1}$$

Note que $\widetilde{\gamma}$ también es una parametrización de la circunferencia de radio R (demuéstrelo), la cual va en el sentido de las manecillas del reloj ya que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(0) &= (R\cos(2\pi), R\,\mathrm{sen}(2\pi)) = (R, 0);\\
\widetilde{\gamma}\left(\frac{R\pi}{4v}\right) &= \left(R\cos\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{R\pi}{4v}\right), R\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{R\pi}{4v}\right)\right)\\
&= \left(R\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right), R\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\\
&= \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right);
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}\left(\frac{R\pi}{2v}\right) &= \left(R\cos\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{R\pi}{2v}\right), R\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{R\pi}{2v}\right)\right)\\
&= \left(R\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), R\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\\
&= (0, -R).
\end{aligned}$$

Además cumple que

$$\|\widetilde{\gamma}'(t)\| = \left\|\left(v\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{v}{R}t\right), -v\cos\left(2\pi - \frac{v}{R}t\right)\right)\right\| = v. \tag{2}$$

En vista de todo lo anterior, ya estamos en condiciones de resolver el problema. En primer lugar, tenemos que si $t_0 = \dfrac{5R\pi}{4v}$, como $\dfrac{5\pi}{4} < 2\pi$, entonces $t_0 \in \left[0, \dfrac{2R\pi}{v}\right]$, por lo cual tiene sentido evaluar $\widetilde{\gamma}$ en t_0 y además se cumple que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(t_0) &= \widetilde{\gamma}\left(\frac{5R\pi}{4v}\right)\\
&= \left(R\cos\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{5R\pi}{4v}\right), R\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{5R\pi}{4v}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(R\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), R\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\
&= \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right), \qquad (3)
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, para resolver el problema nos interesa el comportamiento de $\widetilde{\gamma}$ en $t_0 = \dfrac{5R\pi}{4v}$.

Primero, a partir de (1), o mejor, a partir de (2), obtenemos que la velocidad a la cual se desprende la partícula es

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}'(t_0) &= \widetilde{\gamma}'\left(\frac{5R\pi}{4v}\right) \\
&= \left(v\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{5R\pi}{4v}\right), -v\cos\left(2\pi - \frac{v}{R}\frac{5R\pi}{4v}\right) \right) \\
&= \left(v\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right), -v\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\
&= \left(\frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Luego, a partir de (3) y (4), la recta tangente a la circunferencia en $\widetilde{\gamma}(t_0)$ está parametrizada por

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(s) &= \widetilde{\gamma}(t_0) + s\widetilde{\gamma}'(t_0) \\
&= \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right) + s\left(\frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \left(\frac{-R + sv}{\sqrt{2}}, \frac{R + sv}{\sqrt{2}} \right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Para continuar, nos interesa la intersección de $\mathscr{L}$ con el eje Y, es decir, nos interesa que la primera coordenada sea cero, por lo cual queremos hallar el valor de $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$
\frac{-R + s_0 v}{\sqrt{2}} = 0,
$$

de donde

$$
s_0 = \frac{R}{v}. \qquad (6)
$$

Por lo tanto, la intersección de la partícula con el eje Y se da en el punto

$$
\mathscr{L}(s_0) = \left(0, \frac{R + \frac{R}{v}v}{\sqrt{2}} \right) = \left(0, \frac{2R}{\sqrt{2}} \right). \qquad (7)
$$

Ahora, para determinar el tiempo que tarda la partícula en intersecar el eje Y, como la rapidez es constante, nos basta con calcular la distancia entre $\widetilde{\gamma}(t_0)$ y $\mathscr{L}(s_0)$ y luego hacer un despeje sencillo. Así, a partir de (3) y (7) obtenemos que

$$
\|\widetilde{\gamma}(t_0) - \mathscr{L}(s_0)\| = \left\| \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right) - \left(0, \frac{2R}{\sqrt{2}} \right) \right\| = R,
$$

por lo tanto, la distancia recorrida por la partícula desde que se desprende de la circunferencia hasta que toca al eje Y es R. Como la rapidez es constante, el tiempo t_1 que tarda en este recorrido se obtiene como

$$t_1 = \frac{\|\widetilde{\gamma}(t_0) - \mathscr{L}(s_0)\|}{v} = \frac{R}{v}.$$

Finalmente, ya que la distancia no cambia y queremos que el tiempo sea de la mitad, esto es, $t_1 = \dfrac{R}{2v}$, si suponemos que la rapidez sigue siendo constante, entonces la rapidez v_1 buscada debe cumplir

$$v_1 = \frac{\|\widetilde{\gamma}(t_0) - \mathscr{L}(s_0)\|}{t_1} = \frac{R}{\frac{R}{2v}} = 2v,$$

esto es, debe ser el doble de rápido para que recorra la misma distancia en la mitad del tiempo. ∎