Ayudantía 23
Geometría de curvas

En esta sesión formalizaremos algunas ideas *geométricas* que podemos imaginar acerca de **curvas**. Salvo el concepto de vector binormal, que definiremos más adelante, todos los conceptos tienen sentido en $\mathbb{R}^n$.

Antes de iniciar la parte técnica, enunciamos algunas de las propiedades del producto cruz en $\mathbb{R}^3$ que serán utilizadas más adelante. Se espera que el lector las haya demostrado en alguno de sus cursos de álgebra (o que lo haga ahora como ejercicio). Para esto, sean $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^3$, entonces se cumple que

(i). El producto cruz es *bihomogéneo*, esto es, si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\lambda\overline{x}) \times \overline{y} = \lambda(\overline{x} \times \overline{y}) = \overline{x} \times (\lambda\overline{y}).$$

(ii). El producto cruz es *nilpotente*, es decir, para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ se cumple que

$$\overline{x} \times \overline{x} = \overline{0}.$$

(iii). Se cumple que

$$\|\overline{x} \times \overline{y}\| = \|\overline{x}\| \, \|\overline{y}\| |\operatorname{sen}(\theta)|,$$

donde θ es el ángulo entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$.

(iv). El producto cruz es *anticonmutativo*, es decir,

$$\overline{x} \times \overline{y} = -(\overline{y} \times \overline{x}).$$

(v). El producto cruz satisface *cancelación por ortogonalidad*, esto es,

$$\overline{x} \cdot (\overline{x} \times \overline{y}) = 0.$$

(vi). El producto cruz cumple la *regla de la mano derecha*, esto es, si

$$\overline{x} \times \overline{y} = \overline{z},$$

entonces

$$\overline{y} \times \overline{z} = \overline{x}$$

y también

$$\overline{z} \times \overline{x} = \overline{y}.$$

Como ha visto en las sesiones anteriores (en particular en la **Clase 29**), al estudiar el comportamiento de parametrizaciones por longitud de arco ganamos que podemos medir longitudes (en algunos casos) y que la derivada tiene norma constante igual a uno, ¿qué pasa cuando estudiamos a la segunda derivada de dichas parametrizaciones? Como ya se vió en el **Ejemplo 13** de la **Clase 29**, en el caso de la circunferencia de radio r y centro en el origen, al considerar una parametrización γ por longitud de arco se obtiene que $\|\gamma''(t)\| = \dfrac{1}{r}$, por lo cual, mientras más grande sea el radio, más cercano a cero dicho valor y, al menos intuitivamente, "menos curvada" es la figura, mientras que si r es muy pequeño, entonces la circunferencia está "más curvada". Formalizamos esta idea como sigue.

Definición 1. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma''(s)$ existe para toda $s \in I$. Definimos la *curvatura* $k(s)$ de $\mathscr{C}$ en el punto $\gamma(s)$ como

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|.$$

Recordamos que en el caso de parametrizaciones por longitud de arco sabemos que $\gamma'(s)$ y $\gamma''(s)$ son ortogonales. Ya que $\gamma'(s)$ es *tangente* a la curva $\mathscr{C}$, decimos que $\gamma''(s)$ "apunta" en la dirección *normal* a $\mathscr{C}$ (en $\gamma(s)$) e interpretamos que ésta la dirección en la cual "se curva" $\mathscr{C}$. Nuevamente, formalizamos esta idea en la siguiente:

Definición 2. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma''(s)$ existe para toda $s \in I$.

(i). Definimos el *vector tangente unitario* a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$, denotado por $T(s)$, como

$$T(s) := \gamma'(s).$$

(ii). Si $\gamma''(s) \neq \bar{0}$, definimos el *vector normal unitario* a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$, denotado por $N(s)$, como

$$N(s) := \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

(iii). Si $\gamma''(s) \neq \bar{0}$, definimos el *plano osculador* a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$, denotado por Π_s, como el plano que contiene al punto $\gamma(s)$ y es generado por los vectores $T(s)$ y $N(s)$, es decir, de manera explícita tenemos que

$$\Pi_s := \{\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma(s) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(iv). Si $\gamma''(s) \neq \bar{0}$, definimos la *circunferencia osculatriz*[1] a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$, denotada por C_s, como la cirunferencia contenida en el plano osculador Π_s con centro el punto

$$\gamma(s) + \frac{1}{k(s)} N(s),$$

que llamamos *centro de curvatura*, y de radio

$$\frac{1}{k(s)}$$

llamado *radio de curvatura* de $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$.

(v). Si $n = 3$, esto es, si $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$, definimos el *vector binormal unitario* a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$, denotado por $B(s)$, como

$$B(s) := T(s) \times N(s).$$

Observe que la existencia de $\gamma''(s)$ para toda $s \in I$ implica que la función γ' es continua (ya que es derivable). Por lo tanto, en la definición anterior estamos garantizando que $\mathscr{C}$ es una curva suave. Además, $T(s)$ en efecto es unitario porque γ es una parametrización por longitud de arco. Como bien sabe, en español, la palabra *oscular* es sinónimo de "besar", así que la idea de plano y circunferencia osculadores se refiere al plano y a la circunferencia que localmente "hacen mejor contacto" con la curva (o aún más coloquialmente, donde "besan" a la curva).

Para afianzar los conceptos dados en las definiciones 1 y 2 damos un ejemplo que los ilustre.

[1] Algunos autores le llaman *círculo osculador*.

Ejemplo 3. Sea $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ la *hélice* cuya parametrización por longitud de arco $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ está dada por

$$\gamma(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Para cada punto en $\mathscr{C}$ determine (si están definidos) su vector tangente unitario, su curvatura, su vector normal unitario, su vector binormal unitario, su plano osculador y su circunferencia osculadora.

Solución. Ya que tenemos explícitamente la parametrización este problema es muy sencillo. Sea $s \in I$. Hallaremos todos los elementos pedidos en $\gamma(s) \in \mathscr{C}$. Como se trata de una parametrización por longitud de arco, para calcular el vector tangente unitario basta con calcular la derivada $\gamma'(s)$, así que

$$T(s) = \gamma'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{1}$$

Para continuar, calculamos la segunda derivada de γ en s, así, a partir de (3) obtenemos que

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) \tag{2}$$

Luego, a partir de (2) podemos obtener la curvatura en $\gamma(s)$ como

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

El cálculo anterior muestra que para toda $s \in I$ se cumple que $\gamma''(s) \neq \overline{0}$ (¿por qué?), así que están definidos todos los conceptos dados en la Definición 2. En primer lugar, a partir de (2) y (3) se sigue que el vector normal unitario es

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right). \tag{4}$$

Ahora, como $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ y está definido $N(s)$, calculamos el vector binormal $B(s)$ y, en virtud de (1) y (4), obtenemos que

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Continuemos con el cálculo del plano osculador Π_s. Directamente de la definición obtenemos que

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \{\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma(s) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + (1-\beta)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + (1-\beta)\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{\alpha+s}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ &\qquad \left. \vphantom{\frac{1}{\sqrt{2}}} \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

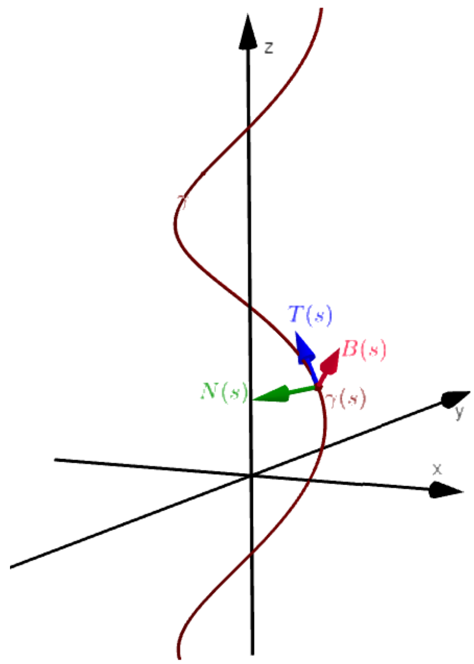

Figura 1: Representación de los vectores $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$.

Sin embargo, en (6) únicamente se da la forma paramétrica del plano, por lo cual nos gustaría tener una ecuación cartesiana de dicho plano. Ya que Π_s es generado por $T(s)$ y $N(s)$, y $B(s)$ es ortogonal a ambos, para obtener una ecuación cartesiana de Π_s, que contiene a $\gamma(s)$, basta considerar

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right)\cdot\left((x,y,z)-\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)=0,$$

de donde después de simplificar obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)x-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+z=\frac{s}{\sqrt{2}}. \tag{7}$$

Note que como $B(s)$ es un vector normal a Π_s, entonces $\sqrt{2}B(s)$ también lo es, y fue éste último el vector que utilizamos para el cálculo de la ecuación cartesiana de Π_s.

Para concluir demos una descripción de la circunferencia osculatriz C_s. Primero, calculemos el centro $\overline{c}_s$ de dicha circunferencia:

$$\begin{aligned}\overline{c}_s &= \gamma(s)+\frac{1}{k(s)}N(s)\\ &= \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)\\ &= \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Luego, como el radio de C_s es

$$\frac{1}{k(s)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,$$

y dicha circunferencia está contenida en Π_s que es generado por $T(s)$ y $N(s)$ (en ese orden), de manera totalmente análoga a la parametrización de una circunferencia de radio R con centro en $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, a partir de la expresión de $\overline{c}_s$ dada en (8) obtenemos una parametrización para $C_s \subset \Pi_s$ vía la función $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned}\delta(\theta) &= \overline{c}_s + 2\cos(\theta)T(s) + 2\operatorname{sen}(\theta)N(s)\\ &= \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + 2\cos(\theta)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &\qquad + 2\operatorname{sen}(\theta)\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right),\end{aligned}$$

que después de hacer las operaciones queda como

$$\delta(\theta) = \left(-\cos\left(\frac{s}{2}\right)(1 + 2\operatorname{sen}(\theta)) - \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos(\theta), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)(1 + 2\operatorname{sen}(\theta)) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\cos(\theta), \frac{s + 2\cos(\theta)}{\sqrt{2}}\right). \tag{9}$$

Esto termina todos los cálculos pedidos. ■

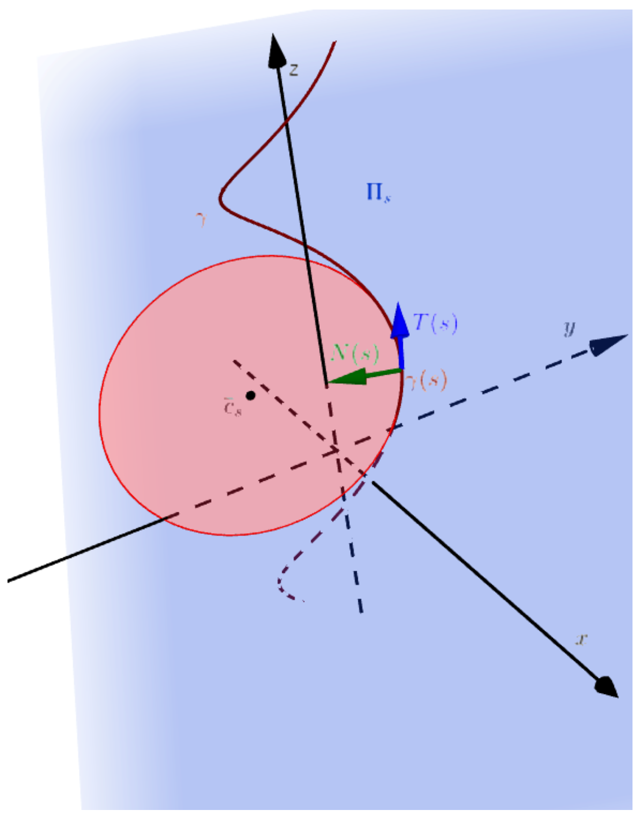

Figura 2: Representación de $\overline{c}_s$ y C_s en el plano osculador Π_s a $\mathscr{C}$ en $\gamma(s)$.

Para continuar, estudiemos qué relaciones existen entre los vectores definidos y sus derivadas.

Proposición 4. *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$. Si $\gamma''(s)$ existe y es no cero, entonces*

$$T'(s) = k(s)N(s).$$

Demostración. Tenemos que $T'(s) = \gamma''(s)$, así que es inmediato de (ii) que $T'(s) = k(s)N(s)$. ■

En lo que resta de la sesión nos restringiremos a curvas en $\mathbb{R}^3$ con el fin de estudiar las relaciones entre los vectores tangente unitario, normal unitario y binormal unitario.

Proposición 5. *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$. Si $B'(s)$ existe para cada $s \in I$, entonces $B'(s)$ es un múltiplo escalar de $N(s)$.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \|B(s)\| &= \|T(s) \times N(s)\| \\ &= \|T(s)\| \; \|N(s)\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene por ser una de las propiedades del producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Para continuar usaremos el siguiente resultado (que indudablemente vendrá en su tarea):

Lema A. Sea $\delta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función derivable. Se cumple que $\|\delta(t)\|$ es constante sí y sólo si $\delta(t) \cdot \delta'(t) = 0$ para toda $t \in I$.

Así, por el Lema A obtenemos que $B(s) \cdot B'(s) = 0$ para toda $s \in I$, es decir, $B(s)$ y $B'(s)$ son ortogonales para toda $s \in I$. Luego, usamos la definición de $B(s)$, las propiedades de derivada, la Proposición 4 y las propiedades del producto cruz (enunciadas al principio) para obtener que

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= k(s)(N(s) \times N(s)) + T(s) \times N'(s) \\ &= T(s) \times N'(s). \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $B'(s)$ también es ortogonal a $T(s)$ (por las propiedades del producto cruz), esto es, $T(s) \cdot B'(s) = 0$.

Ahora, ya que los vectores $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ son unitarios mutuamente ortogonales dos a dos, el conjunto $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Esto implica que existen $\eta, \theta, \zeta \in \mathbb{R}$ tales que

$$B'(s) = \eta T(s) + \theta N(s) + \zeta B(s),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= T(s) \cdot B'(s) \\ &= T(s) \cdot (\eta T(s) + \theta N(s) + \zeta B(s)) \\ &= \eta, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} 0 &= B(s) \cdot B'(s) \\ &= B(s) \cdot (\eta T(s) + \theta N(s) + \zeta B(s)) \\ &= \zeta. \end{aligned}$$

En virtud de lo anterior obtenemos que

$$B'(s) = \theta N(s).$$

Esto termina la prueba. ■

Definición 6. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$. Si para cada $s \in I$ se cumple que $B'(s)$ existe, definimos la *torsión* de la curva $\mathscr{C}$ en el punto $\gamma(s)$, denotada por $\tau(s)$, como el escalar tal que

$$B'(s) = -\tau(s)N(s). \tag{10}$$

La definición anterior es correcta en virtud de la Proposición 5. El signo menos que aparece en la ecuación (10) no tiene ningún significado específico y se usa porque históricamente así se ha trabajado.

Geométricamente, la torsión "mide" qué tanto se "tuerce una curva", es decir, qué tanto tiende a salirse de un plano. Esto contrasta con la curvatura de "mide" qué tanto puede "curvarse" sin salirse de un plano.

Ejemplo 7. Sea $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ la hélice dada en el Ejemplo 3 para la cual consideramos la parametrización por longitud de arco dada por

$$\gamma(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Para cada punto en $\mathscr{C}$ calcule su torsión.

Demostración. Por (4) sabemos que

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right),$$

y por (5) tenemos que

$$B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right).$$

Por lo tanto,

$$B'(s) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right), \tag{11}$$

y así para toda $s \in I$ se obtiene que

$$\tau(s) = \frac{1}{2}.$$

∎

Finalmente nos falta hallar una expresión para $N'(s)$. Como ya se dijo, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, por lo cual $N'(s)$ se puede expresar como combinación lineal de dichos vectores. El siguiente resultado muestra que de hecho $N'(s)$ está en el plano generado por $T(s)$ y $B(s)$ y que, además, los coeficientes que necesitamos son $-k(s)$ y $\tau(s)$.

Proposición 8. *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$. Si para cada $s \in I$ existe $N'(s)$, entonces*

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s).$$

Demostración. A partir de la definición de $B(s)$ y la regla de la mano derecha obtenemos que

$$N(s) = B(s) \times T(s),$$

así que al derivar obtenemos por las propiedades de la derivada que

$$N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s),$$

así que por la Proposición 4 y la Definición 6 obtenemos que

$$\begin{aligned} N'(s) &= (-\tau(s)N(s)) \times T(s) + B(s) \times (k(s)N(s)) \\ &= -k(s)(N(s) \times B(s)) + \tau(s)(T(s) \times N(s)) \\ &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s), \end{aligned}$$

donde las igualdades se obtienen por las propiedades del producto cruz enunciadas al principio. ■

Para concluir, a las identidades

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

se conocen como **fórmulas de Serret-Frenet**.