Clase 25

Iniciamos un nuevo capítulo donde estudiaremos el concepto de derivada, pero de momento solo para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. Este tipo de funciones son utilizadas para describir el movimiento de algunos objetos, razón por la cual dedicamos esta clase a estudiar el concepto de *parametrización*.

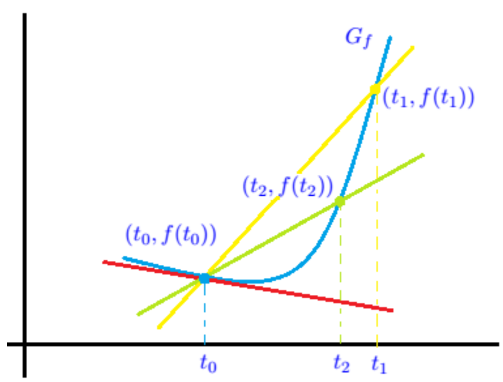
Parametrizaciones

Comenzaremos este tema recordando que una de las motivaciones para definir la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $(t_0, f(t_0))$ (cuando esto sea posible).

Recordemos de nuestros cursos de geometría analítica que para resolver dicho problema nos basta con encontrar la pendiente de dicha recta. Consideremos entonces un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Para cualquier $t_1 \in I \setminus \{t_0\}$ tenemos que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(t_0, f(t_o))$ y $(t_1, f(t_1))$ es

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Así, si $t_1 \in I$ es un punto "cercano" a t_0, pero distinto de t_0, tenemos que el número $\dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(t_0, f(t_0))$. Ahora, si consideramos un punto $t_2 \in I \setminus \{t_0\}$ "más cercano" a t_0, entonces deducimos que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(t_0, f(t_o))$ y $(t_2, f(t_2))$, es decir, $\dfrac{f(t_2) - f(t_0)}{t_2 - t_0}$ debe aproximarse más a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(t_0, f(t_0))$.



De esta manera deducimos que si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe, entonces dicho número debe ser la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(t_0, f(t_0))$.

Dado el análisis anterior, decimos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $t_0 \in I$ si existe $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ y en este caso denotamos por $f'(t_0)$ a dicho límite, es decir, $f'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

Finalmente, tenemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f por el punto $(t_0, f(t_o))$ es

$$y = f'(t_0)(x - t_0) + f(t_0). \tag{1}$$

Por supuesto que lo anterior tiene sentido si f es derivable en t_0.

Veamos otra forma de obtener la ecuación de la recta tangente. Para ello recordemos que una recta en el plano puede ser descrita con un punto de la recta y un vector director, en nuestro caso ya tenemos un punto, a saber $(t_0, f(t_0))$, así que solo resta hallar un vector director. Notemos que el vector

$$(t_1, f(t_1)) - (t_0, f(t_0))$$

es un vector director para la recta amarilla de la imagen anterior y que el vector

$$(t_2, f(t_2)) - (t_0, f(t_0))$$

es un vector director de la recta verde de la misma imagen. Parece entonces que mientras más "cerca" esté un punto $t \in I \setminus \{t_0\}$ de t_0, el vector

$$(t, f(t)) - (t_0, f(t_0))$$

será mas parecido al vector director de la recta tangente buscada. Podríamos pensar que un candidato a vector director para la recta tangente buscada es, si existe,

$$\lim_{t \to t_0} \Big((t, f(t)) - (t_0, f(t_0)) \Big)$$

.

Pero note que dicho límite podría ser cero, por ejemplo si f es continua en t_0. Obervemos lo siguiente, el vector

$$\frac{(t_1, f(t_1)) - (t_0, f(t_0))}{t_1 - t_0}$$

también es un vector director de la recta amarilla pues es de hecho un multiplo escalar , no cero, del vector $(t_1, f(t_1)) - (t_0, f(t_0))$. Aprovechando esta observación podríamos mejor pensar en el vector

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{(t, f(t)) - (t_0, f(t_0))}{t - t_0} \right),$$

si éste existe. Pero note que

$$\frac{(t, f(t)) - (t_0, f(t_0))}{t - t_0} = \left(1, \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Deducimos entonces que si f es derivable en t_0 entonces el vector

$$(1, f'(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{(t, f(t)) - (t_0, f(t_0))}{t - t_0} \right)$$

es un vector director de la recta tangente buscada y así el conjunto

$$\{ (t_0, f(t_0)) + t(1, f'(t_0)) \mid t \in \mathbb{R} \} \tag{2}$$

es la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(t_0, f(t_0))$.

¿Coinciden las descripciones (1) y (2) de la recta tangente buscada? La respuesta es sí y es algo que ustedes verificarán (espero).

Note que en el análisis anterior trabajamos con una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y puntos de la forma $(t, f(t))$ para algunos $t \in I$. Si "corremos" t en todo I ¿qué obtenemos? Así es, la gráfica de f. Entonces, si definimos $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $\gamma(t) = (t, f(t))$ para cada $t \in I$, lo que obtenemos es que

$$\gamma(I) = G_f.$$

En este caso hemos descrito un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (G_f) como la imagen bajo una función (γ) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, de un subconjunto (I) de $\mathbb{R}$. Esto motiva un concepto más general que presentamos a continuación.

Definición 1 *Sean $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, donde I es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que γ es una parametrización de $\mathscr{C}$ si*

$$\gamma(I) = \mathscr{C}.$$

Ejemplo 2 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Entonces $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $\gamma(t) = (t, f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$, es una parametrización de $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.*

Ejemplo 3 *Sea R una recta en $\mathbb{R}^2$. Recuerde que R puede ser descrita como*

$$R = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0 \}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 > 0$ (esto siginifica que a y b no son ambos cero). Halle una parametrización de R.

Solución. Supongamos que $b \neq 0$. Entonces si $(x, y) \in R$ se tiene que $y = \dfrac{-(ax + c)}{b}$. Así, podemos reescribir a (x, y) como $(x, \dfrac{-(ax + c)}{b})$ y la ventaja de esto es que dicha pareja está expresada en términos de una sola variable (parámetro). Definimos $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $\gamma(t) = (t, \dfrac{-(at + c)}{b})$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que γ es una parametrización de R (es decir, que $\gamma(\mathbb{R}) = R$). Note que

$$at + b\Big(\frac{-(at + c)}{b}\Big) + c = 0$$

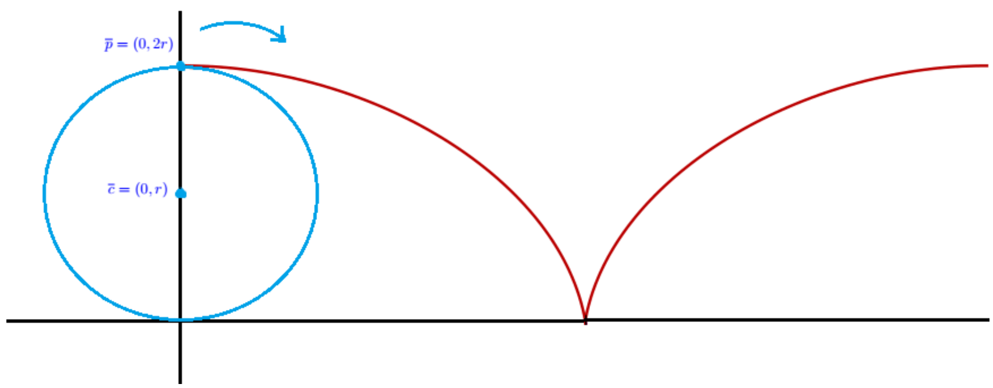
para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde $\gamma(\mathbb{R}) \subseteq R$. Ahora, si $(x, y) \in R$ (entonces $y = \dfrac{-(ax + c)}{b}$) definimos $t = x$, luego

$$\gamma(t) = \gamma(x) = \Big(x, \frac{-(ax + c)}{b}\Big) = (x, y).$$

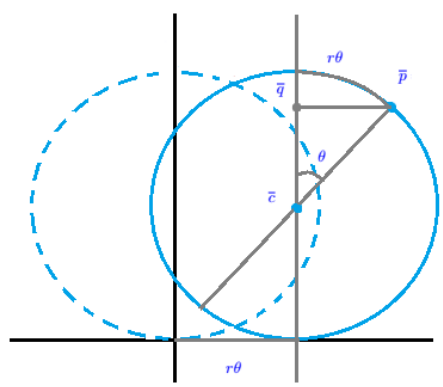
Esto es, $R \subseteq \gamma(\mathbb{R})$. Y así, γ es una parametrización de R. ■

El siguiente ejemplo muestra como las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ pueden ser usadas para describir la "trayectoria"seguida por un objeto.

Ejemplo 4 *Supongamos que tenemos una rueda con una marca. La vamos a rodar (sin resbalar) en línea recta y sobre una superficie plana. Halle una función que nos proporcione la posición de dicha marca, conforme la rueda va girando.*



Solución. Consideraremos una circunferencia de radio $r > 0$ en vez de la rueda y un punto $\overline{p}$ en vez de la marca. Más aún, supongamos que, antes de rodar, el centro de dicha circunferencia es el punto $\overline{c} = (0, r)$, que el punto $\overline{p}$ tiene como coordenadas a $(0, 2r)$ y que rodaremos la circunferencia hacia la parte positiva del eje X. Note que al rodar la circunferencia la posición de $\overline{p}$ cambia y por lo tanto también sus coordenadas. Así, el hallar una función que nos proporcione la posición de dicha marca es equivalente a hallar las nuevas coordenadas de $\overline{p}$. Determinaremos dichas coordenadas usando el ángulo (θ) formado por la recta paralela al eje Y que pasa por el centro de la circuferencia, y el segmento de recta que une al centro $\overline{c}$ con el punto $\overline{p}$.



Como la circunferencia rueda sobre el eje X la segunda coordenada (la "altura") del centro de la circunferencia no cambia y para determinar la primer coordenada basta observar que la distancia recorrida por la circunferencia sobre el eje X es igual a la longitud del arco subtendido por el ángulo opuesto a θ, es decir, $r\theta$. Así, las "nuevas" coordenadas del centro $\overline{c}$ son $(r\theta, r)$. Ahora, para obtener las "nuevas" coordenadas del punto $\overline{p}$ solo debemos sumar a la primer coordenada del "nuevo" centro la longitud del segmento $[\overline{p}, \overline{q}]$ y a la segunda coordenada la longitud del segmento $[\overline{c}, \overline{q}]$. Pero note que dichas longitudes son $r\text{sen}\theta$ y $r\cos\theta$ respectivamente, pues el triangulo con vértices $\overline{p}, \overline{q}$ y $\overline{c}$ es rectángulo. Así, tenemos que las "nuevas" coordenadas de $\overline{p}$ son $(r\theta + r\text{sen}\theta, r + r\cos\theta)$.

Por lo tanto, $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(\theta) = (r\theta + r\text{sen}\theta, r + r\cos\theta)$, para cada $\theta \in \mathbb{R}$, describe la posición del punto $\overline{p}$. ■

La "curva"descrita en el ejemplo anterior es llamada cicloide.

¡Momento! ¿Por qué en la Definición 1 dice UNA parametrización? ¿Hay más de una?

Ejemplo 5 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|$ *y consideremos* $G_f = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$*. En el Ejemplo 2 vimos que* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (t, |t|)$ *es una parametrización de* G_f*. Ahora consideremos* $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & si \quad t \geq 0 \\ \\ (-t^2, t^2) & si \quad t < 0 \end{cases}$$

Veamos que es una parametrización, es decir que $\tilde{\gamma}(\mathbb{R}) = G_f$*.*

Sea $(x, |x|) \in G_f$*. Si* $x \geq 0$*, entonces elegimos* $t = \sqrt{x}$ *y tenemos que*

$$\tilde{\gamma}(t) = (t^2, t^2) = ((\sqrt{x})^2, (\sqrt{x})^2) = (x, x) = (x, |x|).$$

Si $x < 0$*, elegimos* $t = -\sqrt{-x}$ *y tenemos que*

$$\tilde{\gamma}(t) = (-t^2, t^2) = (-(\sqrt{-x})^2, (\sqrt{-x})^2) = (x, -x) = (x, |x|).$$

Es decir, $G_f \subseteq \tilde{\gamma}(\mathbb{R})$*. Para la otra contención solo basta notar que para cualquier* $t \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $(t^2, t^2) = (t^2, |t^2|)$ *y que* $(-t^2, t^2) = (-t^2, |t^2|)$ *(los puntos en* $\tilde{\gamma}(\mathbb{R})$ *son de la forma* $(x, |x|)$*). Por lo tanto* $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una parametrización de* G_f *y es distinta de* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$*.*

Ejemplo 6 *Consideremos ahora* $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$*, la circunferencia en* $\mathbb{R}^2$ *con centro en el origen y radio* r*. Se tiene que* $\gamma : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (r cost, r sent)$ *es una parametrización de* C_r *(lo verán en la Ayudantía). Ahora, consideremos* $\tilde{\gamma} : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\tilde{\gamma}(t) = (r cos(2\pi t), r sen(2\pi t))$*. Se tiene que* $\tilde{\gamma} : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una parametrización de* C_r *distinta de* $\gamma : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$*.*

Observación 7 *Dado* $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrización de* $\mathscr{C}$*, el Ejemplo 6 nos sugiere una forma de obtener una parametrización de* $\mathscr{C}$ *a partir de* γ*. Consideremos* $J \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\alpha : J \longrightarrow I$ *una función. Si* α *es suprayectiva, entonces* $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *dada por* $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha)(t)$ *es una parametrización de* $\mathscr{C}$*.*