Última actualización: 4 de mayo de 2022

Clase 26

La sesión pasada definimos lo siguiente:

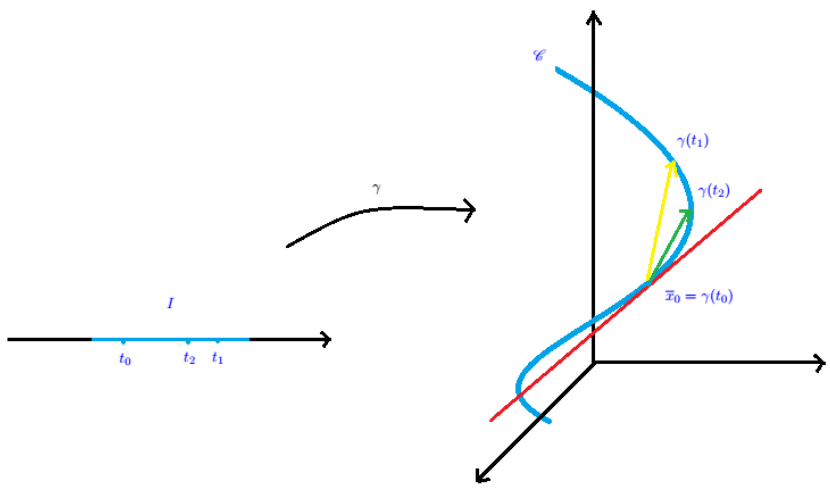
Definición 1 *Sean $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, donde I es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que γ es una parametrización de $\mathscr{C}$ si*

$$\gamma(I) = \mathscr{C}.$$

En esta ocasión introduciremos el concepto de derivada para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, justo las funciones que ocupamos en las parametrizaciones.

La derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$

Consideremos un conjunto $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ y un punto $\overline{x}_0 \in \mathscr{C}$. Supongamos que I es un intervalo, $t_0 \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de $\mathscr{C}$ tal que $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$.



Como antes ya habiamos visto, si $t \in I \setminus \{t_0\}$ es un punto "muy cercano" a t_0, entonces el vector

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

es "muy parecido" al vector director de la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\overline{x}_0$, por supuesto, si no es el vector cero.

Así, si

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

existe, debe ser un vector director de la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\overline{x}_0$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2 *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que **$\gamma$ es derivable en t_0** si existe*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

En este caso denotaremos por $\gamma'(t_0)$ a dicho límite y lo llamaremos la derivada de γ en t_0, es decir,

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Observación 3 *Note que en la definición anterior I denota un intervalo abierto, pero puede darse la definición para un intervalo arbitrario usando límites laterales (¿Cuáles? ¿Cómo los definiría?).*

Continuamos definiendo la recta tangente a $\mathscr{C}$ en un punto $\overline{x}_0$.

Definición 4 *Sean $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\overline{x}_0 \in \mathscr{C}$. Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de $\mathscr{C}$ derivable en $t_0 \in I$ tal que $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$ y $\gamma'(t_0) \neq \overline{0}$, definimos **la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\overline{x}_0$** como la recta definida por*

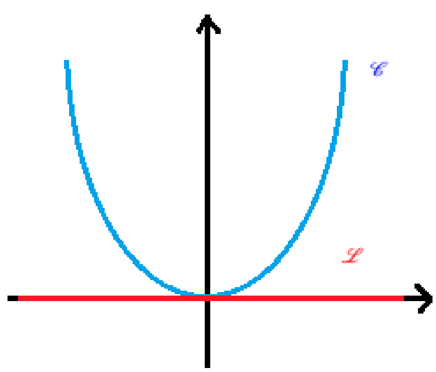
$$\mathscr{L}(t) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0).$$

Ejemplo 5 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y consideremos $\mathscr{C} = G_f$ la gráfica de f. Halle la recta tangente a $\mathscr{C}$ por el punto $(0,0)$.*

Solución. Consideremos $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$. Note que $\tilde{\gamma}$ es una parametrización de $\mathscr{C}$, aunque no la más natural. Ahora, se tiene que $\tilde{\gamma}(0) = (0,0)$ y por otro lado

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)}{t - 0} = \lim_{t \longrightarrow 0} (t^2, t^5) = (0,0).$$

Es decir, $\tilde{\gamma}'(0) = (0,0)$. Recuerde que el vector cero no nos sirve para generar la recta tangente buscada, pero esto no significa que no exista la recta tangente.



Entonces consideremos otra parametrización, la más natural. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$. Se tiene que $\gamma(0) = (0,0)$ y

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \lim_{t \longrightarrow 0} (1, t) = (1,0).$$

Así, $\gamma'(0) = (1,0) \neq (0,0)$, luego la recta tangente $\mathscr{L}$ a $\mathscr{C}$ por el punto $(0,0)$ está definida por

$$\mathscr{L}(t) = \gamma(0) + t\gamma'(0) = (0,0) + t(1,0) = (t,0).$$

Efectivamente, el eje X, como lo esperabamos. ■

Ejemplo 6 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |x|$ y $\mathscr{C} = G_f$ la gráfica de f. Considere las siguientes parametrizaciones de $\mathscr{C}$:*

(1) $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, |t|)$.

(2) $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & si \quad t \geq 0 \\ \\ (-t^2, t^2) & si \quad t < 0 \end{cases}$$

Halle, si existen, $\gamma'(0)$ y $\tilde{\gamma}'(0)$.

Solución.

(1) Para γ tenemos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(t, |t|)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(t, t)}{t} = (1,1)$$

y

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{(t, |t|)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(t, -t)}{t} = (1,-1).$$

Como los límites laterales no son iguales se sigue que γ no es derivable en 0 (¿Qué resultado sobre límites laterales estaremos usando aquí?).

(2) Para $\tilde{\gamma}$ tenemos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(t^2, t^2)}{t} = \lim_{t \to 0^+} (t, t) = (0,0)$$

y

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{(-t^2, t^2)}{t} = \lim_{t \to 0^+} (-t, t) = (0,0).$$

Así que $\tilde{\gamma}$ sí es derivable en 0 y $\tilde{\gamma}'(0) = (0,0)$.

■

Note que en el inciso (2) del ejemplo anterior se muestra que a pesar de que G_f tenga un "pico" en $(0,0) = \tilde{\gamma}(0)$ la parametrización $\tilde{\gamma}$ es derivable en 0 (una diferencia con Cálculo I).

Entonces, si $\mathscr{C}$ es parametrizada por una función γ y $\gamma'(t)$ siempre existe y es distinta del vector cero, diremos que $\mathscr{C}$ es "**suave**". Por el contrario, si $\gamma'(t)$ es el vector cero, entonces no podemos asegurar nada acerca del aspecto geométrico de $\mathscr{C}$.

Continuamos enunciando un resulatdo bastante útil, pues relaciona la derivada de una función $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y la derivada de cada una de sus funciones coordenadas.

Proposición 7 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se tiene que γ es derivable en t_0 si y sólo si γ_i es derivable en t_0 para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. En ambos casos se tiene que*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), ..., \gamma_n'(t_0)).$$

La demostración de esta proposición es una consecuencia de los teoremas de límites antes vistos (el límite de una función existe si existe el límite de cada función coordenada).

Definición 8 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Diremos que* ***γ es derivable en I*** *si γ es derivable en cada $t \in I$.*

Ejemplo 9 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I. Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la función dada por $\gamma(t) = (t, f(t))$. Muestre que γ es una función derivable en I.*

Solución. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = f(t)$. Note que γ_1 y γ_2 son derivables en I, pues la función identidad y la función f lo son. Además, como $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, de la Proposición 7, se sigue que γ es derivable en I, además

$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right) = \left(1, f'(t)\right),$$

para cada $t \in I$. ■