Última actualización: 12 de mayo de 2022

Clase 27

La clase anterior, entre otras cosas, vimos lo siguiente:

Definición 1 *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que* ***$\gamma$ es derivable en t_0*** *si existe $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$. En este caso denotaremos por $\gamma'(t_0)$ a dicho límite y lo llamaremos la derivada de γ en t_0, es decir, $\gamma'(t_0) = \displaystyle\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$.*

Definición 2 *Sean $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\overline{x}_0 \in \mathscr{C}$. Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de $\mathscr{C}$ derivable en $t_0 \in I$ tal que $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$ y $\gamma'(t_0) \neq \overline{0}$, definimos* ***la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\overline{x}_0$*** *como la recta definida por $\mathscr{L}(t) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0)$.*

Proposición 3 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se tiene que γ es derivable en t_0 si y sólo si γ_i es derivable en t_0 para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. En ambos casos se tiene que*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), ..., \gamma_n'(t_0)).$$

Definición 4 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Diremos que* ***γ es derivable en I*** *si γ es derivable en cada $t \in I$.*

En esta ocasión, enunciaremos varias propiedades de la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, pero antes de comenzar con este propósito, veremos un ejemplo donde utilizaremos la Proposición 3.

Propiedades de la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 5 (Cardioide) *Sea $\mathscr{C} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r = 2(1 + cos(\theta))\}$. Halle la recta tangente a $\mathscr{C}$ en los puntos $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$.*

Solución. Lo primero que debemos notar es que el conjunto $\mathscr{C}$ está dado en coordenadas polares. Una vez observado esto, notemos que $0 \leq r \leq 4$ (recuerda que $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$), es decir, r *oscila* entre 0 y 4. Por ejemplo cuando $\theta = 0$ tenemos que $r = 4$, cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ tenemos que $r = 2$, cuando $\theta = \pi$ tenemos que $r = 0$ y cuando $\theta = \frac{3\pi}{2}$ tenemos que $r = 2$. Con las observaciones anteriores podemos darnos una idea de cómo se "ve" el conjunto $\mathscr{C}$, vea figura 1.

Ahora, describiremos $\mathscr{C}$ en coordenadas cartesianas. Para ello, debemos recordar las ecuaciones de cambio de coordenadas $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\text{sen}(\theta)$. Como $r = 2(1 + \cos(\theta))$, tenemos que

$$x = 2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta) \qquad y = 2(1 + \cos(\theta))\text{sen}(\theta).$$

Así, $\mathscr{C} = \{(2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta), 2(1 + \cos(\theta))\text{sen}(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Dado lo anterior, si definimos $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(\theta) = (2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta), 2(1 + \cos(\theta))\text{sen}(\theta))$, tenemos que γ es una parametrización de $\mathscr{C}$ expresada en términos de sus coordenadas cartesianas.

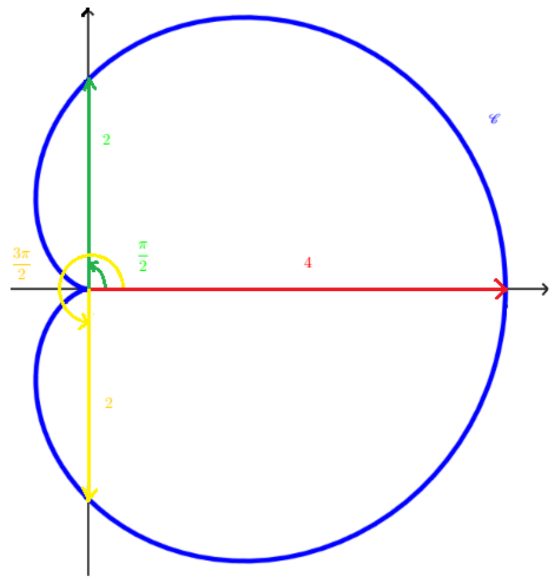

Figura 1: El conjunto $\mathscr{C}$ es llamado *la cardioide.*

Luego, por la Proposición 3, tenemos que γ es derivable y además

$$\gamma'(\theta) = (-2\text{sen}(\theta) - 2\text{sen}(2\theta), 2\cos(\theta) + 2\cos(2\theta)).$$

Como $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,2)$ y $\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-2)$, que en coordenadas polares son $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ respectivamente, entonces la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $(0,2)$ es la recta determinada por la ecuación

$$\mathscr{L}_1(t) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) + t\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,2) + t(-2,-2) = (-2t, 2-2t),$$

es decir, el conjunto $\{(-2t, 2-2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Por otro lado, la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $(0,-2)$ es la recta determinada por la ecuación

$$\mathscr{L}_2(t) = \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) + t\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-2) + t(2,-2) = (2t, -2-2t),$$

esto es, el conjunto $\{(2t, -2-2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$, vea figura 2. ■

La Proposición 3, junto con las propiedades ya conocidas de la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tienen como consecuencia inmediata la siguiente proposición.

Proposición 6 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\gamma, \tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tres funciones. Si γ, $\tilde{\gamma}$ y h son derivables en t_0, entonces*

(1) $\gamma + \tilde{\gamma}$ es derivable en t_0 y

$$(\gamma + \tilde{\gamma})'(t_0) = \gamma'(t_0) + \tilde{\gamma}'(t_0).$$

(2) $h\gamma$ es derivable en t_0 y

$$(h\gamma)'(t_0) = h'(t_0)\gamma(t_0) + h(t_0)\gamma'(t_0).$$

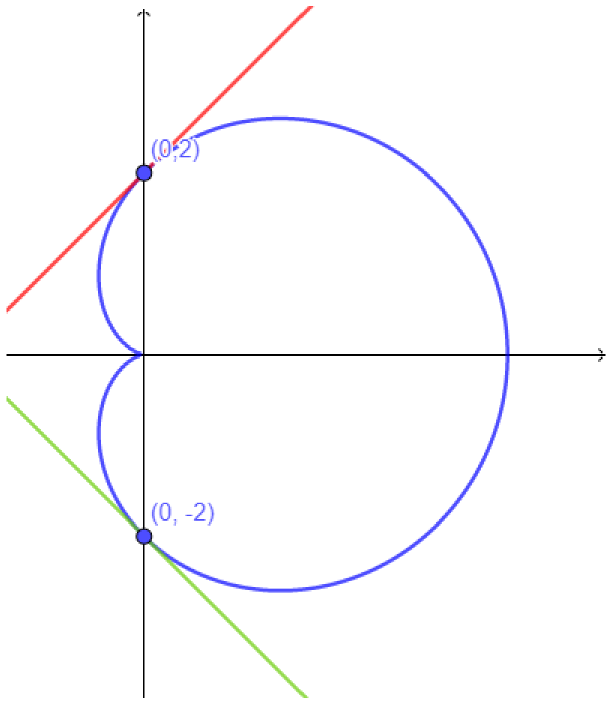

Figura 2: Se muestran las rectas tangentes a $\mathscr{C}$ en los puntos $(2, \pi/2)$ y $(2, 3\pi/2)$.

(3) $\gamma \cdot \tilde{\gamma}$ *es derivable en* t_0 *y*

$$(\gamma \cdot \tilde{\gamma})'(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot \tilde{\gamma}(t_0) + \gamma(t_0) \cdot \tilde{\gamma}'(t_0).$$

(4) Si $n = 3$, $\gamma \times \tilde{\gamma}$ *es derivable en* t_0 *y*

$$(\gamma \times \tilde{\gamma})'(t_0) = \gamma'(t_0) \times \tilde{\gamma}(t_0) + \gamma(t_0) \times \tilde{\gamma}'(t_0).$$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7 *Sean* $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ *y* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *derivable en* t_0*. Si* $c \in \mathbb{R}$*, entonces la función* $c\gamma$ *es derivable en* t_0 *y*

$$(c\gamma)'(t_0) = c\gamma'(t_0).$$

Una operación que no consideramos en la Proposición 6 es la composición, pues aunque en el orden adecuado podemos componer con funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, para éstas últimas no tenemos (aún) el concepto de derivada. Así que, por el momento, solo podemos enunciar la siguiente *regla de la cadena.*

Proposición 8 *Sean* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *intervalos,* $t_0 \in I$*,* $x_0 \in J$*,* $h : J \longrightarrow I$ *y* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tales que* $h(x_0) = t_0$*. Si* h *es derivable en* x_0 *y* γ *es derivable en* t_0*, entonces* $\gamma \circ h$ *es derivable en* x_0 *y*

$$(\gamma \circ h)'(x_0) = \gamma'(h(x_0))h'(x_0).$$

Demostración. Basta notar que si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$, entonces $\gamma \circ h = (\gamma_1 \circ h, \gamma_2 \circ h, ..., \gamma_n \circ h)$, usar la Proposición 3 y la regla de la cadena de Cálculo I. ■

De nuestros cursos de Cálculo I, sabemos que la derivabilidad en un punto implica la continuidad en el mismo punto y este hecho para las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ no es la excepción.

Proposición 9 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ $t_0 \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se tiene que si γ es derivable en t_0, entonces γ es continua en t_0.*

Demostración. Se tiene que $\lim_{t\to t_0}(t-t_0) = 0$ y como γ es derivable en t_0, $\gamma'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$. Así, tenemos que

$$\overline{0} = (0)(\gamma'(t_0)) = \left(\lim_{t\to t_0}(t-t_0)\right)\left(\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right) = \lim_{t\to t_0}\big(\gamma(t)-\gamma(t_0)\big).$$

Se sigue que $\lim_{t\to t_0}\gamma(t) = \gamma(t_0)$, es decir, γ es continua en t_0. ■

Por supuesto "el regreso"de la proposición anterior, igual que en Cálculo I, no es verdadero, es decir, la continuidad no implica la derivabilidad.

Ejemplo 10 *Consideremos $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, |t|)$. Como cada función coordenada es continua en 0, entonces γ es continua en 0. Ahora, como la segunda función coordenada no es derivable en 0 se sigue, de la Prosición 3, que γ no es derivable en 0.*

Otra propiedad que podríamos intentar generalizar es el Teorema del Valor Medio:
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Pero, el siguiente ejemplo muestra que en general no es posible.

Ejemplo 11 *Considere la función $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t)$.*

(a) Demuestre que γ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

(b) Muestre que no existe $\xi \in (0,1)$ que cumpla que $\gamma'(\xi) = \gamma(1) - \gamma(0)$.

Sol.

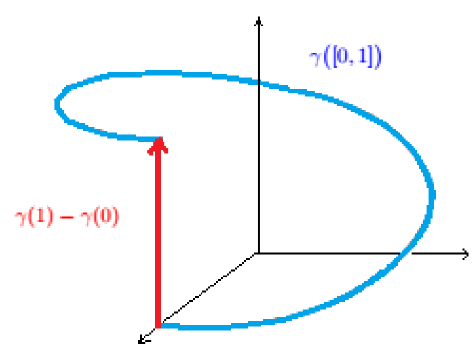

Figura 3: El Teorema del Valor Medio NO vale, en general, para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

(a) Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\gamma_1(t) = \cos(2\pi t)$, $\gamma_2(t) = \operatorname{sen}(2\pi t)$ y $\gamma_3(t) = t$. Note que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y como γ_1, γ_2 y γ_3 son continuas en $[0,1]$ y derivables en $(0,1)$, entonces γ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

(b) Para cada $t \in (0,1)$ se tiene que $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) = (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1)$. Por otro lado $\gamma(1) - \gamma(0) = (1,0,1) - (1,0,0) = (0,0,1)$. Así, para que $\gamma'(t) = (0,0,1)$ debería suceder que $-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t) = 2\pi \cos(2\pi t) = 0$, es decir, que $-\operatorname{sen}(2\pi t) = \cos(2\pi t) = 0$ $\left(-\operatorname{sen}(2\pi t) = \cos(2\pi t) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t) = 0\right)$, lo cual no ocurre. Es decir, ningún vector tangente a $\gamma\big([0,1]\big)$ es paralelo al vector $\gamma(1) - \gamma(0)$. Por lo tanto, no existe $\xi \in (0,1)$ que cumpla que $\gamma'(\xi) = \gamma(1) - \gamma(0)$.

Como ya vimos, en general no se cumple el Teorema del Valor Medio, pero tenemos una "versión"del Teorema del Valor Medio para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que demostrarán en su tarea: Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $\gamma'(t) \neq (0,0)$. Entonces existen $\xi \in (a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b-a} = \lambda \gamma'(\xi).$$