Última actualización: 13 de mayo de 2022

Clase 28

Para esta sesión es conveniente recordar lo siguiente:

Definición 1 *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que* $\boldsymbol{\gamma}$ ***es derivable en t_0*** *si existe $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$. En este caso denotaremos por $\gamma'(t_0)$ a dicho límite y lo llamaremos la derivada de γ en t_0, es decir, $\gamma'(t_0) = \lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$.*

Ejercicio 2 *[Ejercicio 11 de la Tarea 03] Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$. Definimos $B = \{\overline{x} - \overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, \overline{x} \in A\}$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como $g(\overline{h}) = f(\overline{x}_0 + \overline{h})$ para cada $\overline{h} \in B$. Pruebe que:*

1. *$\overline{x}_0 \in A'$ sí y sólo si $\overline{0} \in B'$.*
2. *$\bar{l} = \lim\limits_{\overline{x} \longrightarrow \overline{x}_0} f(\overline{x})$ sí y sólo si $\bar{l} = \lim\limits_{\overline{h} \longrightarrow \overline{0}} g(\overline{h})$.*

En esta clase definiremos las derivadas de orden superior para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ y comenzaremos el estudio de *curvas*.

Curvas

Como consecuencia del Ejercicio 11 de la Tarea 03 (Ejercicio 2 en este documento), tenemos la siguiente observación.

Observación 3 *Sea $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función. Se tiene que γ es derivable en t_0 si y sólo si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

existe. En este caso,

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

Definición 4 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivable en I y $k \in \mathbb{N}$. Si definimos $\gamma^{(1)}(t)$ como $\gamma'(t)$ para cada $t \in I$ y $\gamma^{(k)}$ es derivable en I, definimos de manera inductiva la $(k+1)$-ésima derivada de γ en t, denotada por $\gamma^{(k+1)}(t)$, como*

$$\gamma^{(k+1)}(t) = \left(\gamma^{(k)}\right)'(t),$$

es decir,

$$\gamma^{(k+1)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma^{(k)}(t + h) - \gamma^{(k)}(t)}{h},$$

para cada $t \in I$.

Ejemplo 5 *Considere* $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$. *Muestre que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe la* n*-ésima derivada de* γ *en cada* $t \in [0, 2\pi]$ *y calcúlela.*

Solución. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\gamma_1(t) = r\cos(t)$ y $\gamma_2(t) = r\operatorname{sen}(t)$. Note que γ_1 y γ_2 son las funciones coordenadas de γ, es decir, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Ahora, sabemos que tanto γ_1 como γ_2 son derivables en $[0, 2\pi]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe la n-ésima derivada de γ_1 y de γ_2 en cada $t \in [0, 2\pi]$, más aún

$$\gamma_1^{(n)}(t) = \begin{cases} -r\operatorname{sen}(t) & si\ n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ -r\cos(t) & si\ n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N} \\ r\operatorname{sen}(t) & si\ n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N} \\ r\cos(t) & si\ n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

y

$$\gamma_2^{(n)}(t) = \begin{cases} r\cos(t) & si\ n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ -r\operatorname{sen}(t) & si\ n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N} \\ -r\cos(t) & si\ n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N} \\ r\operatorname{sen}(t) & si\ n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Así,

$$\gamma^{(n)}(t) = \begin{cases} \big(-r\operatorname{sen}(t), r\cos(t)\big) & si\ n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ \big(-r\cos(t), -r\operatorname{sen}(t)\big) & si\ n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N} \\ \big(r\operatorname{sen}(t), -r\cos(t)\big) & si\ n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N} \\ \big(r\cos(t), r\operatorname{sen}(t)\big) & si\ n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

■

Continuaremos estudiando una de las aplicaciones de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

Definición 6 *Sea* $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ *. Diremos que* $\mathscr{C}$ *es una curva si existe una parametrización* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *de* $\mathscr{C}$, *derivable en* I. *Si además* $\gamma'(t) \neq \overline{0}$ *para todo* $t \in I$, *diremos que* $\mathscr{C}$ *es una curva suave.*

Dado un conjunto $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ sólo nos basta hallar una parametrización derivable para que dicho conjunto sea llamado curva, pero si pedimos algunas hipótesis adicionales a la parametrización derivable, es posible deducir "la longitud de $\mathscr{C}$" o de un arco de $\mathscr{C}$:

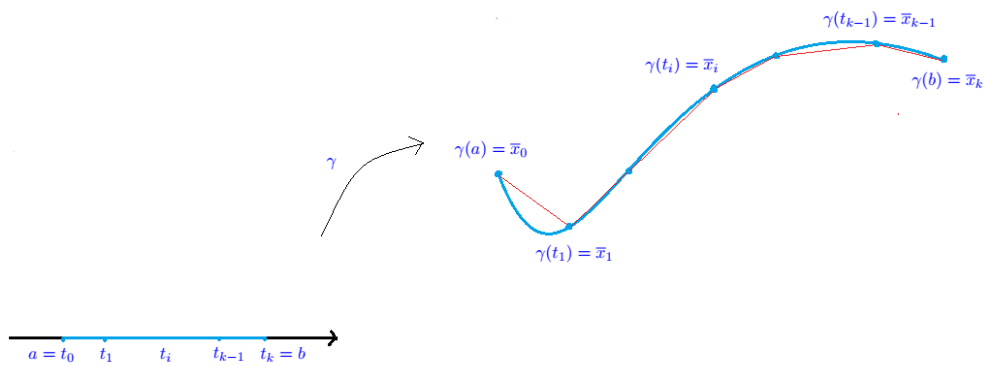
Consideremos una curva $\mathscr{C}$ parametrizada por $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (a partir de ahora cuando escriba "curva parametrizada por..."me referiré a una parametrización derivable). Supongamos además que γ es **inyectiva** salvo quizás en los extremos su dominio, a y b.

Note que un primer paso para hallar dicha longitud puede ser "aproximar" la curva con poligonales. Una vez dicho esto consideremos una cantidad finita de puntos $\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_k$ en $\mathscr{C}$, donde $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_k$ son los "extremos" de $\mathscr{C}$.

Se tiene que la longitud de la poligonal $[\overline{x}_0, \overline{x}_1] \cup \cdots \cup [\overline{x}_{k-1}, \overline{x}_k]$, que de hecho es

$$\sum_{i=1}^{k} \|\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}\|,$$

se "aproxima" a la longitud de $\mathscr{C}$. Además, mientras más puntos elijamos, más "próxima" será. Ahora, como γ es inyectiva, existen puntos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ en $[a, b]$ tales que $\gamma(t_i) = \overline{x}_i$



para cada $i = 1, 2, ..., k$. Note que hemos obtenido una partición $\mathscr{P} = \{t_0, t_1, ..., t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ y además

$$\sum_{i=1}^{k} \|\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Ahora, usaremos el Teorema del valor Medio para escribir $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ de otra manera (Ojo, nos referimos al TVM de Cálculo 1, aplicado a cada función coordenada y en cada uno de los intervalos inducidos por la partición). Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ entonces, aplicando el Teorema de Valor Medio a cada función coordenada γ_j en cada uno de los intervalos de la forma (t_{i-1}, t_i), tenemos que existen $\xi_{i,j} \in (t_{i-1}, t_i)$ tales que

$$\frac{\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \gamma_j'(\xi_{i,j}).$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= (\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), ..., \gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})) \\
&= \big(\gamma_1'(\xi_{i,1})(t_i - t_{i-1}), ..., \gamma_n'(\xi_{i,n})(t_i - t_{i-1})\big) \\
&= \big(\gamma_1'(\xi_{i,1}), ..., \gamma_n'(\xi_{i,n})\big)\,(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Note que si cada γ_j' fuera continua y la partición $\mathscr{P}$ muy fina (la distancia entre t_i y t_{i-1} sería "pequeña") entonces la distancia entre $\gamma_j'(\xi_{i,j})$ y $\gamma_j'(\xi_i)$ sería muy "pequeña" para cualquier $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ (serían "muy parecidos"). Bajo estas condiciones, es decir, considerando una partición $\mathscr{P}$ "muy fina" y agregando la hipótesis de que γ' es **continua** en $[a, b]$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \|\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}\| \approx \sum_{i=1}^{k} \|\gamma'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}).$$

Finalmente, podemos identificar la última suma como una suma de Riemann de la función $f(t) = \|\gamma'(t)\|$ en el intervalo $[a, b]$. Así que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\; dt$$

parece ser la longitud de $\mathscr{C}$.

Veamos con un ejemplo si vamos por buen camino.

Ejemplo 7 *Consideremos* $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$. *Recordemos que* γ *parametriza* C_r, *la circunferencia con centro en el origen y de radio* $r > 0$, *así que deberiamos poder comprobar que la longitud de* C_r *es* $2\pi r$.
Se tiene que $\gamma'(t) = (-r\operatorname{sen}(t), r\cos(t))$, *por lo que* $\|\gamma'(t)\| = r$ *para toda* $t \in [0, 2\pi]$. *Entonces*

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \; dt = \int_0^{2\pi} r \; dt = 2\pi r.$$

Parece que nuestra deducción es correcta. Ahora, note que la función γ utilizada en el ejemplo anterior cumple ser inyectiva y que γ' es continua en $[0, 2\pi]$. ¿Qué ocurre si γ no es inyectiva?

Para responder esta pregunta, consideremos $\tilde{\gamma} : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = (r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$. Se tiene que $\tilde{\gamma}$ también parametriza a C_r, pero esta no es inyectiva, de hecho $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t + 2\pi))$ para todo $t \in [0, \pi]$. Por otro lado, $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = r$ y de aquí

$$\int_0^{3\pi} \|\tilde{\gamma}'(t)\| \; dt = \int_0^{2\pi} r \; dt = 3\pi r.$$

Por supuesto esto no es la longitud de C_r, pero lo que podemos decir, en este caso, es que $\tilde{\gamma}$ "le dio vuelta y media a C_r."

Definición 8 *Sea* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función tal que* $\|\gamma'\|$ *es integrable en* $[a, b]$. *Definimos la longitud de* γ, *denotada por* $l(\gamma)$, *como*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt.$$

Si γ *es inyectiva en* $[a, b]$, *salvo un número finito de puntos, y parametriza una curva* $\mathscr{C}$, *entonces* $l(\gamma)$ *se puede interpretar como la "longitud" de* $\mathscr{C}$.

Debemos notar que en la definición anterior no pedimos que γ' sea continua en $[a, b]$, pues para considerar la integral $\displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt$ solo basta que $\|\gamma'\|$ sea integrable en $[a, b]$ (por supuesto que si γ' es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$).