Última actualización: 16 de mayo de 2022

Clase 29

Recordemos dos definiciones vistas en la sesión anterior:

Definición 1 *Sea* $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ *. Diremos que* $\mathscr{C}$ *es una curva si existe una parametrización* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, de* $\mathscr{C}$*, derivable en* I*. Si además* $\gamma'(t) \neq \overline{0}$ *para todo* $t \in I$*, diremos que* $\mathscr{C}$ *es una curva suave.*

Definición 2 *Sea* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función tal que* $\|\gamma'\|$ *es integrable en* $[a, b]$*. Definimos la longitud de* γ*, denotada por* $l(\gamma)$*, como*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Si γ *es inyectiva en* $[a, b]$*, salvo un número finito de puntos, y parametriza una curva* $\mathscr{C}$*, entonces* $l(\gamma)$ *se puede interpretar como la "longitud" de* $\mathscr{C}$*.*

En esta ocasión estudiaremos un tipo particular de parametrizaciones de una curva dada, las parametrizaciones por longitud de arco.

Parametrizaciones por longitud de arco

Note que, bajo las condiciones de la Definición 2, podemos considerar la función $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\alpha(t) = \displaystyle\int_a^t \|\gamma'(x)\| \, dx$. Si además γ es inyectiva en $[a, b]$, salvo un número finito de puntos, la función α nos proporcionaria la "longitud" del arco $\gamma([a, t])$.

Ejemplo 3 *Consideremos la función* $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$*. En este caso, la función* $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *comentada anteriormente tiene la siguiente regla de correspondencia*

$$\alpha(t) = \int_0^t r \, dt = tr.$$

.

Si además de la inyectividad en $[a, b]$, salvo un número finito de puntos, pedimos que $\|\gamma'\|$ sea continua en $[a, b]$, entonces, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo [1], α es derivable en $[a, b]$ y para todo $t \in [a, b]$ se tiene que

$$\alpha'(t) = \|\gamma'(t)\| \geq 0.$$

[1] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_a^t f(x) \, dx$$

es derivable en $[a, b]$ y para cada $c \in [a, b]$ se tiene que $F'(c) = f(c)$

Mejor aún, si $\|\gamma'\|$ es continua y $\gamma'(t) \neq \bar{0}$ para toda $t \in [a,b]$, entonces $\alpha'(t) > 0$ para toda $t \in [a,b]$. Bajo estas condiciones se sigue que α es creciente, luego existe $\alpha^{-1} : [0, l(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}$. Más aún, como $\alpha'(t) \neq 0$ para toda $t \in [a,b]$, por el Teorema de la Función Inversa [2] α^{-1} es derivable.

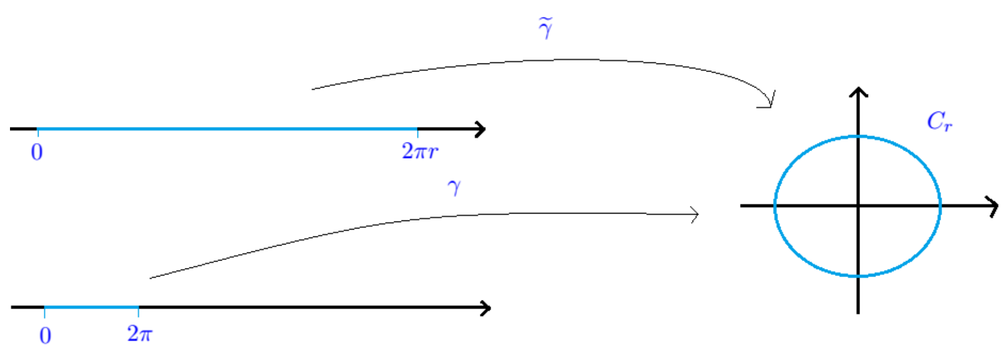
Usando lo anterior podemos obtener otra parametrización de $\gamma([a,b])$, a saber $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha^{-1})(t).$$

Veamos lo anterior con un ejemplo.

Ejemplo 4 *Consideremos las funciones γ y α del Ejemplo 3. Note que γ es inyectiva, salvo en $a = 0$ y $b = 2\pi$, $\|\gamma'\|$ es continua y $\gamma'(t) \neq \bar{0}$ para toda $t \in [0, 2\pi]$, es decir, se satisfacen las hipótesis del análisis anterior. Ahora, $\alpha^{-1} : [0, 2\pi r] \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $\alpha^{-1}(t) = \dfrac{t}{r}$. Así, la nueva parametrización de C_r es $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi r] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que está dada por*

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= (\gamma \circ \alpha^{-1})(t) \\ &= \gamma\left(\frac{t}{r}\right) \\ &= \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{r}\right)\right). \end{aligned}$$



¿Y qué de especial tiene la parametrización $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha^{-1})(t) : [0, l(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^n$? Pues que la longitud del dominio de $\tilde{\gamma}$, es decir, la longitud del intervalo $[0, l(\gamma)]$, es justo la longitud de γ. Así, parece que $\tilde{\gamma}$ "recorre" una "unidad de distancia" sobre la curva $\mathscr{C} = \gamma([a,b])$ por cada "unidad de distancia" que "recorre" el parámetro $t \in [0, l(\gamma)]$. Esto, en términos de rapidez significa que $\|\gamma'\|$ debe ser constante e igual a 1.
La discución anterior motiva la siguiente definición.

Definición 5 *Sean $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de $\mathscr{C}$. Diremos que γ es una parametrización por longitud de arco de $\mathscr{C}$ si $\|\gamma'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$.*

El proceso anterior, el de obtener una parametrización a partir de otra dada, es parte de uno más general que definimos a continuación.

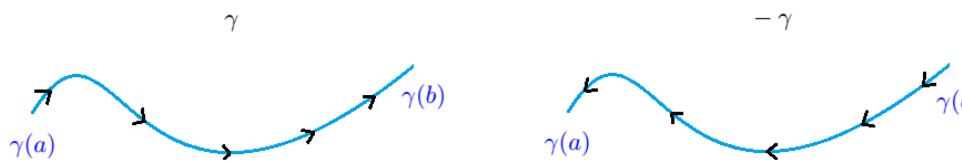
[2] Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva, y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(y)$, con derivada $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en y, y

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Definición 6 *Sea $\mathscr{C}$ una curva, $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de $\mathscr{C}$ y $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función derivable. Diremos que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ si existe $\alpha : J \longrightarrow I$ suprayectiva y derivable tal que $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha)(t)$ para toda $t \in J$. Si $\alpha'(t) \geq 0$ para toda $t \in J$ diremos que $\tilde{\gamma}$ preserva la orientación de γ, y si $\alpha'(t) \leq 0$ para toda $t \in J$ diremos que $\tilde{\gamma}$ invierte la orientación de γ.*

Observación 7 *Note que si γ es una parametrización de una curva $\mathscr{C}$, entonces cualquier reparametrización de γ también es una parametrización de $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 8 *Sea $\mathscr{C}$ una curva parametrizada por $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Consideremos $\alpha : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ dada por $\alpha(t) = a+b-t$. Note que α es suprayectiva, derivable y $\alpha'(t) = -1 < 0$. Así, $\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha)(t) = \gamma(a+b-t)$ es una reparametrización de γ que invierte la orientación de γ.*



Note además que $\tilde{\gamma}(a) = b$ y $\tilde{\gamma}(b) = (a)$, es decir, el punto inicial de $\tilde{\gamma}$ es el punto final de γ y el punto final de $\tilde{\gamma}$ es el punto inicial de γ. Por esta razón, denotamos por $-\gamma$ a $\tilde{\gamma}$. Es decir, $-\gamma$ es la función $-\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$.

Ejemplo 9 *Consideremos ahora $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$ y sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow [0, 2\pi]$ dada por $\alpha(t) = 2\pi t$. Note que α es suprayectiva, derivable y $\alpha'(t) = 2\pi > 0$, por lo que $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha)(t) = (r\cos(2\pi t), r\operatorname{sen}(2\pi t))$, preserva la orientación de γ.*

Ahora, note que $\tilde{\gamma}'(t) = (-2\pi r\operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t))$, por lo que $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 2\pi r$ para toda $t \in [0, 2\pi]$. Y como $\|\gamma'(t)\| = r$ podemos concluir que $\tilde{\gamma}$ "recorre más rapido" C_r que γ.

Regresemos a las parametrizaciones por longitud de arco.

Observación 10 *Note que si $\mathscr{C}$ es una curva que tiene una parametrización por longitud de arco, entonces $\mathscr{C}$ es una curva suave (como $\|\gamma'(t)\| = 1$, entonces $\gamma'(t) \neq \overline{0}$).*

Proposición 11 *Sea $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva suave. Si existe una parametrización $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que γ' es continua y $\gamma'(t) \neq \overline{0}$ para toda $t \in I$, entonces $\mathscr{C}$ tiene una parametrización por longitud de arco.*

Demostración. Sea $t_0 \in I$ fijo, Definimos $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

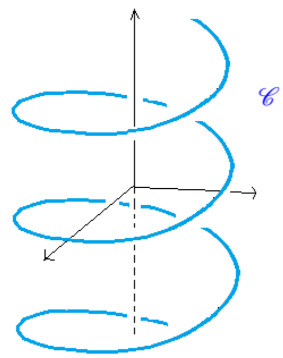
$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(x)\| \, dx.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que α es derivable y $\alpha'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ para toda $t \in I$. Así, α es invertible y, por el Teorema de la Función Inversa, $\alpha^{-1} : \alpha(I) \longrightarrow I$ es derivable. Sea $\tilde{\gamma} : \alpha(I) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha^{-1})(t)$, note que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ, así que es una parametrización de $\mathscr{C}$. Luego, $\tilde{\gamma}'(t) = (\gamma \circ \alpha^{-1})'(t) = \gamma'(\alpha^{-1}(t))(\alpha^{-1})'(t)$, es decir,

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\alpha^{-1}(t))\frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(t))} = \gamma'(\alpha^{-1}(t))\frac{1}{\|\gamma'(\alpha^{-1}(t))\|}.$$

Se sigue que $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$ para toda $t \in \alpha(I)$, esto es, $\tilde{\gamma}$ es una parametrización por longitud de arco de $\mathscr{C}$. ■

Ejemplo 12 (Hélice) *Sean $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, y $\mathscr{C} = \gamma(\mathbb{R})$. Encuentre una parametrización por longitud de $\mathscr{C}$.*



Solución. Primero note que $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Se sigue que $\gamma'(t) \neq \overline{0}$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y que γ' es continua en $\mathbb{R}$.

Ahora, procederemos a construir $\tilde{\gamma}$, la parametrización por longitud de arco de $\mathscr{C}$. Definimos $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\alpha(t) = \displaystyle\int_0^t \|\gamma'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}t$. Luego $\alpha^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $\alpha^{-1}(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$. Así, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \alpha^{-1})(t) = \gamma\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

es una parametrización por longitud de arco de $\mathscr{C}$. ■

Continuaremos mostrando una forma de usar las parametrizaciones por longitud de arco. Para ello es necesario recordar el Ejercicio 2 de la Tarea 05:
Para una función $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivable, se tiene que $\|\gamma(t)\|$ es constante si y sólo si $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ para toda $t \in I$.

Ahora, si $\mathscr{C}$ es una curva y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de $\mathscr{C}$, tenemos que $\|\gamma'\|$ es constante. Si además existe $\gamma''(t)$ para cada $t \in I$, por el Ejercicio 2 de la Tarea 05, tenemos que $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$ para toda $t \in I$. Es decir, el vector $\gamma''(t)$ es perpendicular al vector $\gamma'(t)$ que es un vector director de la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $\gamma(t)$. Entonces,$\gamma''(t)$ o la norma de $\gamma''(t)$ debe contener información sobre $\mathscr{C}$ en el punto $\gamma(t)$. Intentemos descifrarlo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13 *Consideremos C_r, la circunferencia con centro en el origen y radio $r > 0$, y la parametrización por longitud de arco $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \left(r\cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r\operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{r}\right)\right)$.*

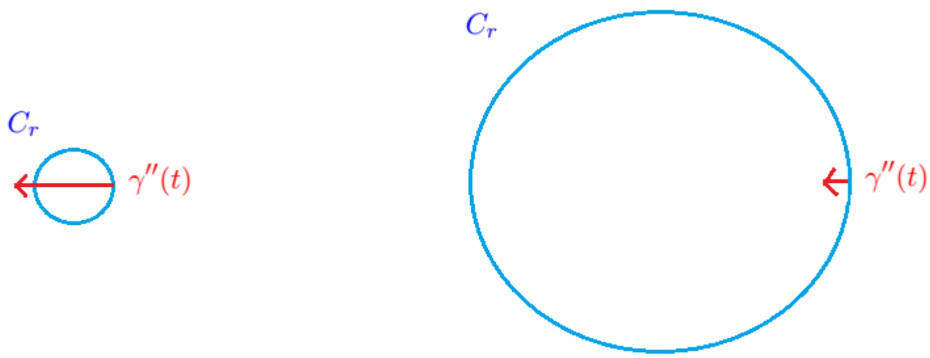
Se tiene que

$$\gamma'(t) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right), \cos\left(\frac{t}{r}\right) \right)$$

y

$$\gamma''(t) = \left(\frac{-1}{r} \cos\left(\frac{t}{r}\right), \frac{-1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right) \right).$$

Así que $\|\gamma''(t)\| = \dfrac{1}{r}$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$.



Note que, si el radio es "pequeño", entonces $\|\gamma''(t)\|$ *es "grande" y si* r *es "grande" entonces* $\|\gamma''(t)\|$ *es "pequeño". Luego, observando que si el radio* r *de una circunferencia es muy grande, ésta está "menos curvada", y si el radio* r *es muy pequeño, entonces la circunferencia está "muy curvada", concluimos que* $\|\gamma''(t)\|$ *indica qué tanto se "curva"* $\mathscr{C}$ *en el punto* $\gamma(t)$.

Como seguramente ya sospechan el siguiente paso es dar la definición de la curvatura de una curva $\mathscr{C}$, pero esto lo trataremos en otra sesión.