Interludio de Álgebra Lineal

El objetivo de esta sesión es recordarles algunas herramientas de Álgebra Lineal que serán utilizadas a lo largo de este capítulo y del siguiente. Se hace esto para tener claridad acerca de los conceptos que se necesitarán y evitar confusiones más adelante.

Conceptos elementales

Con la esperanza de que haya visto la definición de **espacio vectorial** en su curso de Álgebra Lineal, aquí únicamente nos centraremos en ver que $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, es un espacio vectorial (real). Primero, recordamos que $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de n-adas $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, donde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $x_i \in \mathbb{R}^n$, esto es,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para toda } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Como se ha hecho hasta ahora, la *suma* (vectorial) de $\mathbb{R}^n$ está definida coordenada a coordena, es decir, si $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n), \overline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\overline{x} + \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ está dado por

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

mientras que la *multiplicación* (por escalares) está definida para $a \in \mathbb{R}$ y $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$a\overline{x} = (ax_1, \dots, ax_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Como ya sabemos, el elemento $\overline{0} = (0, \dots, 0)$ cumple que para cualquier $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se cumple que $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$. Además, $1 \in \mathbb{R}$ satisface que $1\overline{x} = \overline{x}$. Otras de las propiedades importantes son las siguientes: dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

(i). $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$,

(ii). $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$,

(iii). si denotamos $-\overline{x} = (-1)\overline{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$, entonces $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$,

(iv). $a(b\overline{x}) = (ab)\overline{x}$,

(v). $a(\overline{x} + \overline{y}) = a\overline{x} + a\overline{y}$, y

(vi). $(a + b)\overline{x} = a\overline{x} + b\overline{x}$.

Como recordará, las propiedades anteriores son las que definen a un espacio vectorial.

También, recordemos que un subconjunto $\mathscr{B} \subset \mathbb{R}^n$ es una *base*, supongamos que $\mathscr{B} = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$, si cumple dos condiciones:

(i). Para cualquier $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1\overline{v}_1 + \cdots + \lambda\overline{v}_n = \overline{x},$$

es decir, $\mathscr{B}$ es un conjunto generador.

(ii). Si se cumple que

$$\lambda_1\overline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\overline{v}_n = \overline{0}$$

para algunos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Se puede demostrar que las dos condiciones anteriores son equivalentes a que dada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *existen únicos* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1 \overline{v}_1 + \cdots + \lambda \overline{v}_n = \overline{x}.$$

No pierda vista que en este párrafo se habla de existencia y unicidad de los escalares, mientras que en la primera condición de la definición únicamente se habla de existencia de dichos escalares.

Dado un espacio vectorial, en particular $\mathbb{R}^n$, existen una infinidad de bases (de $\mathbb{R}^n$). Por ejemplo, se tiene que $\mathscr{B}_1 = \{(2,1),(0,4)\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{(-10^6,-3),(1,0)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

Para continuar haremos mención de un cierto tipo de bases que utilizaremos a lo largo de este capítulo (no solamente de este texto). En primer lugar, consideremos $\mathscr{B} = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Si los elementos de $\mathscr{B}$ cumplen que $\overline{v}_i \cdot \overline{v}_j = 0$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, diremos que $\mathscr{B}$ es una *base ortogonal* de $\mathbb{R}^n$. Si además de ser una base ortogonal, los elementos de $\mathscr{B}$ cumplen que $\|v_i\| = 1$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces diremos que $\mathscr{B}$ es una *base ortonormal*.

Finalmente, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ consideremos

$$\overline{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

donde la i-ésima coordenada es igual a 1 y todas las demás son cero. Tenemos que $\mathscr{B}_0 = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ (demuéstrelo). Además, si $i \neq j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = 0$, y también $\|\overline{e}_i\| = 1$, por lo cual $\mathscr{B}_0$ es una base ortonormal. A $\mathscr{B}_0$ se le conoce como *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Interpretación geométrica I

La existencia de bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ nos permite construir sistemas cartesianos de referencia. Dicho sistema queda bien definido porque estamos considerando *bases ordenadas*, así, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, los sistemas de referencia generados por $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ y $\{\overline{e}_2, \overline{e}_1\}$ serán diferentes (esto se verá con mayor claridad más adelante).

El sistema cartesiano usual es el generado por la base canónica $\mathscr{B}_0$, donde cada *dirección* está determinada por cada uno de los vectores canónicos. Ahora, consideremos $\mathscr{B}_1 = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathscr{B}_1$ es ortonormal (recuerde que en caso necesario puede utilizar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de cualquier base dada). También, como en la sección anterior, consideremos $\mathscr{B}_0$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, si $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, al considerar los sistemas cartesianos de referencia, obtenemos dos expresiones en coordenadas de $\overline{x}$: para la base canónica $\mathscr{B}_0$ es $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, esto es, las coordenadas en el sistema usual coinciden con la expresión como elemento de $\mathbb{R}^n$, mientras que en la base $\mathscr{B}_1$ tenemos que $\overline{x} = (x_1', \dots, x_n')$, donde $x_1', \dots, x_n' \in \mathbb{R}$ son los únicos coeficientes tales que

$$x_1' \overline{v}_1 + \cdots + x_n' \overline{x}_n = (x_1, \dots, x_n).$$

Ilustraremos la idea anterior en $\mathbb{R}^2$. En el caso de la base canónica, el sistema cartesiano que define coincide con la interpretación geométrica que se hace usualmente, esto es,

$$\overline{x} = (x_1, x_2) = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2.$$

Como aprendió hace tiempo, en este caso, el punto en el plano en este sistema de referencia, se obtiene primero avanzando x_1 unidades en la dirección de $\overline{e}_1$ y luego x_2 unidades en la dirección de $\overline{e}_2$. Vea la Figura 1.

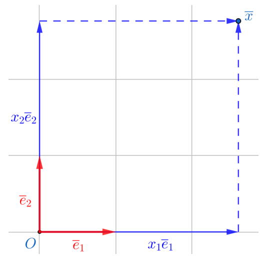


Figura 1: Sistema coordenado respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^2$.

Análogamente, si $\mathscr{B}_1 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ es otra base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\overline{x} = (x_1', x_2') = x_1'\overline{v}_1 + x_2'\overline{v}_2,$$

por lo cual, al repetir el procedimiento anterior, el punto en el sistema de referencia asociado a $\mathscr{B}_1$ se obtiene al avanzar x_1' unidades en la dirección de $\overline{v}_1$ y después x_2' unidades en la dirección de $\overline{v}_2$. Vea la Figura 2.

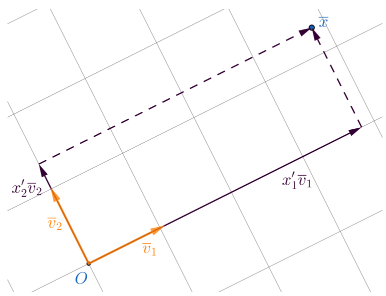


Figura 2: Sistema coordenado respecto a la base $\mathscr{B}_1$ en $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, comparemos las posiciones relativas de los sistemas anteriores en una única imagen para que note la diferencia entre el significado de ambas *coordenadas*. Vea la Figura 3

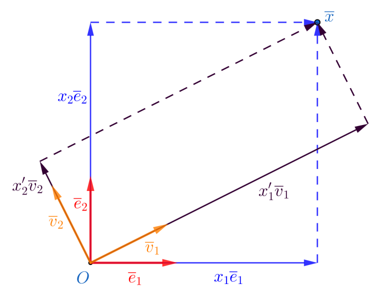


Figura 3: Comparación de los dos sistemas de referencia que tenemos en $\mathbb{R}^2$.

Matrices

Hasta ahora, cuando se ha definido una función f con dominio un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, que por abuso de lenguaje decimos que está definida en los elementos de A, siempre hemos usado las coordenadas dadas por la base canónica $x_1, \dots, x_n$ para cada punto $\overline{x} \in A$ (recuerde todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora). Sin embargo, ya que existen una infinidad de bases, en realidad podemos tomar cualesquiera otras coordenadas $x'_1, \dots, x'_n$ asociadas a una base ortonormal $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Aunque los resultados (de este capítulo y el siguiente) se enunciarán con independencia del sistema coordenado considerado (esto es, no consideraremos una base dada), cuando sea necesario hacer cálculos explícitos si se requiere fijar alguna de ellas (usualmente será la base canónica). Por lo anterior, ya a veces también nos interesará observar cómo cambia la expresión de la función dependiendo del sistema coordenado elegido, es importante conocer cómo se relaciona una base con otra. Es proceso es conocido en Álgebra Lineal como *cambio de base*.

En primer lugar, sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $\mathscr{B}_0$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ dada en la sección anterior y $\mathscr{B} = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$ otra base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de $\overline{x}$ en la base canónica, y que $\overline{x} = (x'_1, \dots, x'_n)$ son las coordenadas de $\overline{x}$ en la base $\mathscr{B}$. Nos interesa saber cómo pasar de las coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ a las coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$, y recíprocamente, si conocemos las coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$ nos gustaría saber cómo obtener las coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$.

Primero supondremos que conocemos las coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$ de $\overline{x}$. Supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\overline{v}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = a_{i1}\overline{e}_1 + \cdots + a_{in}\overline{e}_n \tag{1}$$

para únicos $a_{i1}, \dots, a_{in} \in \mathbb{R}$. Note que tales coeficientes existen porque $\mathscr{B}_0$ es base de $\mathbb{R}^n$. A continuación, usando (1), al sustituir los valores de cada $\overline{v}_i$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= x'_1\overline{v}_1 + \dots + x'_n\overline{v}_n \\
&= x'_1(a_{11}\overline{e}_1 + \cdots + a_{1n}\overline{e}_n) + \cdots + x'_n(a_{n1}\overline{e}_1 + \cdots + a_{nn}\overline{e}_n) \qquad (2)\\
&= (x'_1 a_{11} + \cdots + x'_n a_{n1})\,\overline{e}_1 + \cdots + (x'_1 a_{1n} + \cdots + x'_n a_{nn})\,\overline{e}_n \qquad (3)\\
&= (x'_1, \dots, x'_n)\cdot(a_{11}, \dots, a_{n1})\,\overline{e}_1 + \dots + (x'_1, \dots, x'_n)\cdot(a_{1n}, \dots, a_{nn})\,\overline{e}_n \qquad (4)
\end{aligned}$$

donde para pasar de (2) a (3) se ha agrupado por término común, es decir, el término común es el vector canónico $\overline{e}_i$ en cada caso, y para pasar de (3) a (4) se ha hecho uso de la definición de producto punto.

Justamente a partir de (4) obtenemos que la i-ésima coordenada en la basé canónica de $\overline{x}$ está dada por

$$x_i = (x'_1, \dots, x'_n)\cdot(a_{1i}, \dots, a_{ni}), \tag{5}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Convénzase de este hecho al considerar los casos $i = 1$ e $i = n$. Las relaciones obtenidas a partir de (5) se pueden resumir en el siguiente producto de matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

El problema recíproco, esto es, a partir de las coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ de $\overline{x}$ en la base canónica obtener las coordenadas $(x'_1, \dots, x'_n)$ en la base $\mathscr{B}$, resulta totalmente análogo. Para ello, supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\overline{e}_i = (b_{i1}, \dots, b_{in}) = b_{i1}\overline{v}_1 + \cdots + b_{in}\overline{v}_n \tag{7}$$

para únicos $b_{i1}, \dots, b_{in} \in \mathbb{R}$. Entonces, al sustituir (7) para cada $\overline{e}_i$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n \\
&= x_1(b_{11}\overline{v}_1 + \cdots + b_{1n}\overline{v}_n) + \cdots + x_n(b_{n1}\overline{v}_1 + \cdots + b_{nn}\overline{v}_n) \\
&= (x_1b_{11} + \cdots + x_nb_{n1})\,\overline{v}_1 + \cdots + (x_1b_{1n} + \cdots + x_nb_{nn})\,\overline{v}_n \\
&= (x_1, \ldots, x_n)\cdot(b_{11}, \ldots, b_{n1})\,\overline{v}_1 + \ldots + (x_1, \ldots, x_n)\cdot(b_{1n}, \ldots, b_{nn})\,\overline{v}_n
\end{aligned}$$

y a partir de lo anterior obtenemos que la i-ésima coordenada en la base $\mathscr{B}$ es

$$x_i' = (x_1, \ldots, x_n)\cdot(b_{1i}, \ldots, b_{ni}), \tag{8}$$

o bien, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Sean

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$M' = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que M y M' cumplen las siguientes propiedades:

(i). Las matrices M y M' son mutuamente inversas, es decir, $M^{-1} = M'$ y también $(M')^{-1} = M$.

(ii). La matriz transpuesta M^t de M coincide con la matriz inversa M^{-1}, es decir, $M^t = M^{-1}$ (y análogamente para M').

(iii). El determinante de M tiene valor absoluto 1, es decir, $\det(M) \in \{1, -1\}$.

Esto es un resultado estándar de Álgebra Lineal. Si no lo ha demostrado, no se preocupe, puede usarlo libremente en este curso.

Note que a partir de (i) y (ii) obtenemos que

$$b_{ji} = a_{ij} \tag{10}$$

para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. A matrices que cumplen las propiedades anteriores se les conoce como *matrices ortonormales*.

Para resumir todo lo que sabemos hasta ahora, notemos que, dadas las ecuaciones (6) y (9), al usar la ecuación (10) obtenemos que

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

y también

$$\begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Interpretación geométrica II

Consideremos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$ con sus coordenadas dadas respecto a la base canónica $\mathscr{B}_0$. Recordamos que el producto interior (también llamado producto punto) de $\overline{x}$ y $\overline{y}$ está definido por

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ahora, supongamos que $(x_1', \ldots, x_n')$ y $(y_1', \ldots, y_n')$ son las coordenadas de $\overline{x}$ y $\overline{y}$ respecto a la base $\mathscr{B} = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ considerada en la sección anterior. Denotemos por $\underset{n}{\mathrm{Id}}$ a la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Entonces, por la igualdad (12) y por las propiedades que ya conocemos de la matriz transpuesta, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1' y_1' + \cdots + x_n' y_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \end{pmatrix}^t \\
&= \left(\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} M^t \right) \left(\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} M^t \right)^t \\
&= \left(\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} M^t \right) \left((M^t)^t \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^t \right) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(M^t M \right) \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(\underset{n}{\mathrm{Id}} \right) \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A partir de la cadena de igualdades de matrices anterior deducimos que

$$x_1' y_1' + \cdots + x_n' y_n' = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

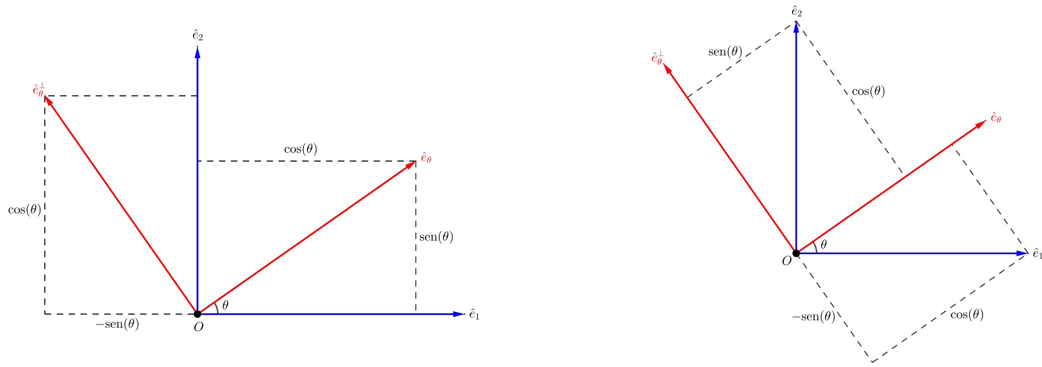
es decir, el producto punto de $\overline{x}$ y $\overline{y}$ es independiente de la BASE ORTONORMAL que consideremos. Esto implica que, de hecho, la *norma* de un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ también es independiente la base ortonormal que estemos considerando porque

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}.$$

Esto quiere decir, geométricamente, que el cambio de coordenadas entre bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ no afecta la relación de ortogonalidad (porque preserva el producto punto), y tampoco cambia las distancias (basta ver el párrafo anterior).

Para concluir esta sesión veamos un ejemplo geométrico que ilustre lo dicho en el párrafo anterior.

Ejemplo 1. En el plano consideremos O un punto dado que llamaremos origen. Consideremos el sistema cartesiano generado por dos vectores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, que se representarán perpendiculares y de la misma longitud. También, tomemos el sistema cartesiano determinado por los vectores $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\theta^\perp\}$,



(a) Transformación de $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ en $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\theta^\perp\}$.　　(b) Transformación de $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\theta^\perp\}$ en $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$.

Figura 4: Comparación de las dos bases ortonormales.

donde $\hat{e}_\theta$ es el vector que se obtiene al girar el vector $\hat{e}_1$ en θ radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y $\hat{e}_\theta^\perp$ se obtiene al girar $\pi/2$ radianes el vector $\hat{e}_\theta$.

Note que por construcción, $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\theta^\perp\}$ es una base ortonormal y sus coordenadas en el sistema determinado por la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ son $(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))$ para $\hat{e}_\theta$ y $(-\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta))$ para $\hat{e}_\theta^\perp$ (vea la Figura 4(4a)), es decir, se cumple que

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= \cos(\theta)\hat{e}_1 + \mathrm{sen}(\theta)\hat{e}_2, \\ \hat{e}_\theta^\perp &= -\mathrm{sen}(\theta)\hat{e}_1 + \cos(\theta)\hat{e}_2. \end{aligned} \tag{13}$$

En virtud de lo anterior, si $\hat{x}$ es un vector en el plano que parte del punto O y tiene coordenadas (x', y') en el sistema coordenado generado por $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\theta^\perp\}$ entonces, por la identidad (6), las coordenadas (x, y) de $\hat{x}$ en el sistema coordenado generado por $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ se obtienen a partir de

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

es decir, explícitamente tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta)\ x' - \mathrm{sen}(\theta)\ y', \\ y &= \mathrm{sen}(\theta)\ x' + \cos(\theta)\ y'. \end{aligned}$$

Recíprocamente, observamos que

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos(\theta)\ \hat{e}_\theta - \mathrm{sen}(\theta)\ \hat{e}_\theta^\perp, \\ \hat{e}_2 &= \mathrm{sen}(\theta)\ \hat{e}_\theta + \cos(\theta)\ \hat{e}_\theta^\perp, \end{aligned}$$

esto se puede obtener mediante despeje a partir de (13) (intente hacerlo). Luego, si (x, y) son las coordenadas de $\hat{x}$ respecto al sistema coordenado generado por $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, en virtud de la identidad (9), obtenemos que las coordenadas (x', y') de $\hat{x}$ en el sistema generado por $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_\theta^\perp\}$ están determinadas a partir de

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

que explícitamente queda como

$$x' = \cos(\theta)\ x + \operatorname{sen}(\theta)\ y,$$
$$y' = -\operatorname{sen}(\theta)\ x + \cos(\theta)\ y.$$

Note que las matrices anteriores

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

cumplen las propiedades que se mencionaron en la sección anterior.