Addendum 03
Formas cuadráticas

Dedicamos esta sesión a explicar algunos conceptos relacionados con formas cuadráticas. Aunque este concepto se puede definir en espacios vectoriales (de cualquier dimensión, y probablemente ya lo vieron en su curso de Álgebra Lineal), para los fines de este curso nos basta con considerar formas cuadráticas definidas sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 1. Una *forma cuadrática* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $a \in \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $Q(a\overline{x}) = a^2 Q(\overline{x})$ y existe $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineal tal que para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $Q(\overline{x}) = B(\overline{x}, \overline{x})$.

Note que la primera parte de la definición nos dice que una forma cuadrática es una función homogénea de orden 2. Esto "nos dice" que, si Q no es la forma cuadrática constante cero ($Q(\overline{x}) = 0$ para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$), todos los monomios que forman parte de la expresión (en coordenadas) de Q son de *grado* 2, es decir, Q admite una expresión de la forma

$$Q(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \tag{1}$$

para algunos $a_i \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y donde suponemos que $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (para alguna base de $\mathbb{R}^n$). Este resultado es un teorema importante de Álgebra Lineal, pero por ahora nos basta con esta idea intuitiva.

Observación 2. Se puede demostrar que, si Q es un forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, Q tiene asociada una matriz simétrica A_Q (esto es, $A_Q^t = A_Q$) de tamaño $n \times n$, y recíprocamente, si A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, entonces tiene asociada una forma cuadrática $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} Q_A(\overline{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2}$$

donde nuevamente escribimos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 3. Consideremos el caso de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$. Es un teorema que si $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, entonces Q se expresa de la forma

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

A partir de esta ecuación no es difícil deducir que su expresión matricial es

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ejemplo 4. Consideremos $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U, $\overline{x}_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subset U$. Entonces, a partir del Teorema de Taylor es inmediato que si $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ cumple que $\|\overline{h}\| < r$, entonces

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_0 + \overline{h}) &= P_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}) + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}) \\ &= f(\overline{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}), \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} = 0.$$

Nos centramos en particular en la suma

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j. \tag{3}$$

Notamos que la ecuación (3) se puede escribir en forma matricial como

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} Hf(\overline{x}_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

donde $Hf(\overline{x}_0)$ denota a la matriz

$$Hf(\overline{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Llamaremos a $Hf(\overline{x}_0)$ la *matriz hessiana* de f en $\overline{x}_0$.

Ya que f es una función de clase C^2 en U, y en particular en $B_r(\overline{x}_0)$, entonces la segundas derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existen en $B_r(\overline{x}_0)$ y son continuas en $\overline{x}_0$, así que, por el Teorema de las parciales cruzadas, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, x_n\}$ se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0),$$

lo cual muestra que $Hf(\overline{x}_0)$ es una matriz simétrica. Así, por la segunda parte de la Observación 2, $Hf(\overline{x}_0)$ tiene asociada una forma cuadrática que denotaremos por $Hf_{\overline{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y llamaremos la *hessiana* de f en $\overline{x}_0$, cuya expresión matricial en $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ está dada por

$$\begin{aligned} Hf_{\overline{x}_0}(\overline{x}) &= Hf_{\overline{x}_0}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} Hf(\overline{x}_0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Definición 5. Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática.

(i). Si se cumple que $Q(\overline{x}) = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$, decimos que Q es *no degenerada.*

(ii). Si $Q(\overline{x}) \geq 0$ para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, decimos que Q es *semipositiva.*

(iii). Si $Q(\overline{x}) \leq 0$ para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, decimos que Q es *seminegativa.*

Lema 6. *Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática semipositiva (resp. seminegativa) y no degenerada asociada a una matriz A, entonces existe $M > 0$ (resp. $m < 0$) tal que*

$$Q(\overline{h}) \geq M\|\overline{h}\|^2 \qquad (\textit{resp. } Q(\overline{h}) \leq m\|\overline{h}\|^2)$$

para toda $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Haremos el caso cuando Q es una forma cuadrática seminegativa, el caso de la forma cuadrática semipositiva es análogo.

Recordemos que $S^{n-1} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\overline{x}\| = 1\}$ es un conjunto compacto y toda forma cuadrática es continua (su expresión es un polinomio), entonces Q restringida a S^{n-1} tiene un máximo que llamaremos $m \in \mathbb{R}$, y por las hipótesis de no degeneración y seminegatividad de Q obtenemos que $m < 0$, así que

$$Q(\overline{x}) \leq m$$

para toda $\overline{x} \in S^{n-1}$. Ahora, notemos que la desigualdad deseada se cumple trivialmente si $\overline{h} = \overline{0}$, así que consideremos $\overline{h} \neq \overline{0}$. Así, $\overline{y} = \dfrac{\overline{h}}{\|\overline{h}\|} \in S^{n-1}$, y por la ecuación anterior se cumple que

$$\begin{aligned} m &\geq Q(\overline{y}) \\ &= \overline{y}A\overline{y}^t && \text{(por hipótesis } Q \text{ está asociada a } A) \\ &= \left(\frac{\overline{h}}{\|\overline{h}\|}\right) A \left(\frac{\overline{h}}{\|\overline{h}\|}\right)^t \\ &= \frac{1}{\|\overline{h}\|^2}\left(\overline{h}A\overline{h}^t\right) && \text{(factorizamos las constantes)} \\ &= \frac{1}{\|\overline{h}\|^2}Q(\overline{h}) \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$Q(\overline{h}) \leq m\|\overline{h}\|^2$$

para toda $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$. Esto termina la prueba. ∎

Note la similitud del resultado anterior con la siguiente propiedad de funciones lineales: Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal , entonces existe $M \geq 0$ tal que para cualquier $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se cumple que $\|L(\overline{x})\| \leq M\|\overline{x}\|$.

Caracterización de formas cuadráticas semipositivas (y seminegativas)

Para terminar esta sesión, estudiaremos "intuitivamente" cuándo se cumple que una forma cuadrática Q asociada a una matriz A sea semipositiva (o seminegativa).

En primer lugar, notemos que una forma cuadrática dada por

$$\widetilde{Q}(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \tag{5}$$

es la "más sencilla" de analizar entre las formas cuadráticas que se pueden definir según la expresión (1). De hecho, notemos que, en este caso, $\widetilde{Q}$ es semipositiva (resp. seminegativa) y no degenerada si y sólo si $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. También, es fácil ver que su expresión matricial está dada por

$$\widetilde{Q}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t$$

a partir de lo cual obtenemos que la matriz asociada a $\widetilde{Q}$ es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observe que para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ se cumple que la submatriz

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

cumple que $\det(D_k) = \lambda_1 \cdots \lambda_k$. Esto nos permite formular lo siguiente: $\widetilde{Q}$ es una forma cuadrática no degenerada y semipositiva (resp. seminegativa) si y sólo si $\det(D_k) > 0$ (resp. $\det(D_k) < 0$ si k es impar y $\det(D_k) > 0$ si k es par) para toda $k \in \{1,\ldots,n\}$.

De hecho, tenemos lo siguiente:

Teorema A. Si la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene asociada la matriz simétrica A dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

(i). Q es semipositiva si para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ se cumple que $\det(A_k) > 0$;

(ii). Q es seminegativa si para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ se cumple que $\det(A_k) < 0$ cuando k es impar y $\det(A_k) > 0$ cuando k es par,

donde A_k denota a la submatriz

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. ■

Veamos un poco más. Es un resultado importante de Álgebra Lineal que si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, entonces existe una matriz ortonormal $B \in M_{n\times n}(R)$ tal que BAB^t es una matriz diagonal, es decir,

$$BAB^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Habitualmente se dice: las matrices simétricas son diagonalizables.

Recordamos que las matrices ortonormales aparecieron (en este curso) para hacer cambios de base (entre bases ortonormales), por lo cual podemos afirmar lo siguiente:

Lema B. Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática que tiene asociada la matriz simétrica A (respecto a una base ortonormal $\mathscr{B} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$), entonces existe una base ortonormal $\mathscr{B}' = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ tal que la matriz asociada a Q respecto a la base $\mathscr{B}'$ es una matriz diagonal.

Demostración. Por lo dicho antes, existe una matriz ortonormal

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

tal que BAB^t es una matriz diagonal, por lo cual si consideramos

$$\overline{v}_i = b_{i1}\overline{e}_1 + \cdots + b_{in}\overline{e}_n$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtenemos que $\mathscr{B}' = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Por lo hecho en los Preliminares de Álgebra Lineal, si $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en la base $\mathscr{B}$ y coordenadas $(x_1', \ldots, x_n')$ en la base $\mathscr{B}'$, entonces (matricialmente)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} B \end{aligned}$$

Por lo cual, la forma cuadrática Q expresada en coordenadas $(x_1', \ldots, x_n')$ queda como

$$\begin{aligned} Q(\overline{x}) &= Q(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t \\ &= \left(\begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} B\right) A \left(\begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} B\right)^t \\ &= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \left(BAB^t\right) \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \end{pmatrix}^t \\ &= \lambda_1 \left(x_1'\right)^2 + \cdots + \lambda_n \left(x_n'\right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma cuadrática Q expresada en términos de la base $\mathscr{B}'$ tiene la forma (5). ∎

La parte complicada de la prueba anterior, esto es, el cómo se obtiene la matriz B dada una matriz simétrica A (y también los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), es todo un tema de su curso de Álgebra Lineal, por lo cual no lo trataremos aquí. Por ahora, baste con saber que tal matriz B y tales escalares existen y utilicemos sus propiedades para resolver los problemas que nos interesan.