Ayudantía 24
Ejemplos de derivada direccional

En esta sesión daremos algunos ejemplos acerca de derivada direccional. En primer lugar afiancemos nuestro conocimiento de la derivada direccional mediante el cálculo directo de algunas derivadas.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada en términos de coordenadas en la base canónica por $f(x, y, z) = x^2y + z^3 - 2$. Calcule la derivada direccional de f en $\overline{x}_0 = (0, 0, 0)$ en las direcciones dadas por el vector unitario $\overline{u}_1 = \dfrac{1}{\|(2,3,4)\|}(2, 3, 4)$ y el vector canónico $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Solución. Procedemos por definición. En primer lugar hacemos los cálculos con $\overline{u}_1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(\overline{x}_0 + h\overline{u}_1) - f(\overline{x}_0) &= f\left(h\left(\frac{(2,3,4)}{\|(2,3,4)\|}\right)\right) - (-2) \\
&= f\left(\frac{2h}{\sqrt{29}}, \frac{3h}{\sqrt{29}}, \frac{4h}{\sqrt{29}}\right) + 2 \\
&= \frac{4h^2}{29}\frac{3h}{\sqrt{29}} + \frac{64h^3}{29\sqrt{29}} - 2 + 2 \\
&= \frac{78h^3}{29\sqrt{29}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
D_{\overline{u}_1} f(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}_1) - f(\overline{x}_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{78h^2}{29\sqrt{29}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En conclusión, $D_{\overline{u}_1} f(0, 0, 0) = 0$.

Para continuar, hagamos los cálculos para obtener la derivada en la dirección de $\overline{e}_3$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_3) - f(\overline{x}_0) &= f(0,0,h) - (-2) \\
&= h^3 - 2 + 2 \\
&= h^3.
\end{aligned}$$

A partir de lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
D_{\overline{e}_3} f(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_3) - f(\overline{x}_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por ello concluimos que $D_{\overline{e}_3} f(0, 0, 0) = 0$. ■

Note que es una casualidad que en el ejemplo anterior suceda que las dos derivadas direccionales sean iguales. Para ello observe con atención el siguiente ejemplo, donde la derivada direccional dependerá de la dirección elegida.

A continuación, como señaló Oscar en la **Clase 30**, observaremos cómo afecta el cambio de coordenadas a la expresión de una función (y la de su derivada). Para ello, veremos el ejemplo que él utilizó.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en coordenadas cartesianas asociadas a la base canónica $\mathscr{B}_0 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ por $f(x,y) = x^2 + y^2$. ¿Cuál es su expresión en cualesquiera otras coordenadas?

Solución. Supongamos que $\mathscr{B}_1 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ es otra base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y consideremos que si $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces sus coordenadas en el sistema cartesiano asociado a $\mathscr{B}_1$ son (x', y'). Por lo realizado en el **Interludio de Álgebra Lineal**, sabemos que para pasar de las coordenadas (x,y) a las coordenadas (x', y') existen únicos $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

es decir, de manera explícita tenemos que

$$\begin{aligned} x &= x'a_{11} + y'a_{21} \\ y &= x'a_{12} + y'a_{22}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión de f en términos de las coordenadas (x', y') de un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ está dada por

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= f(x', y') \\ &= (x'a_{11} + y'a_{21})^2 + (x'a_{12} + y'a_{22})^2 \\ &= (a_{11}^2 + a_{12}^2)(x')^2 + 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})x'y' + (a_{21}^2 + a_{22}^2)(y')^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Una pregunta natural es si podemos simplificar de alguna manera la expresión anterior ya que, recordemos, la matriz que relaciona ambos sistemas coordenados cumple algunas relaciones especiales. Por ello, si denotamos

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

tenemos que M es la matriz de cambio de base (vea el **Addendum 02** sobre álgebra lineal) entre $\mathscr{B}_0$ y $\mathscr{B}_1$, por lo cual es una matriz ortonormal, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= MM^{-1} = MM^t \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_22 & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1,$$

por lo cual podemos simplificar la ecuación (1) al sustituir los valores anteriores y obtenemos que

$$f(x', y') = (x')^2 + (y')^2 \tag{2}$$

es la expresión de f en las coordenadas asociadas a la base $\mathscr{B}_1$.

¿Qué ha sucedido? ¿Por qué la expresión es la misma? En general no esperamos que la expresión en distintas bases coincida, sin embargo aquí lo hace por una razón importante: la función f es el cuadrado de la norma del vector, y como ya sabemos que la norma de un vector es independiente de la base ortonormal que consideremos, obtenemos que la función f (en este caso) debe tener la misma expresión en cualquier base ortonormal que consideremos. Entonces, al repetir los cálculos que hizo Oscar (vea el **Ejemplo 2** de la **Clase 30**) obtenemos que

$$D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0) = 2(x_0'u_1' + y_0'u_2').$$

Una manera rápida de obtener la expresión anterior es usar la matriz M. Para ello, recordamos que

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} M$$

y también

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1' & u_2' \end{pmatrix} M$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
2\left(x_0u_1 + y_0u_2\right) &= 2\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= 2\left(\begin{pmatrix} x_0' & y_0' \end{pmatrix} M\right)\left(\begin{pmatrix} u_1' & u_2' \end{pmatrix} M\right)^t \\
&= 2\begin{pmatrix} x_0' & y_0' \end{pmatrix}\left(MM^t\right)\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} x_0' & y_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \\
&= 2\left(x_0'u_1' + y_0'u_2'\right).
\end{aligned}$$

■

Para concluir esta sesión veamos un ejemplo más sobre derivada direccional.

Ejemplo 3. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$ y $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\overline{u}\| = 1$. Si la derivada direccional $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$ existe, entonces también existe la derivada direccional $D_{-\overline{u}}f(\overline{x}_0)$ y además

$$D_{-\overline{u}}f(\overline{x}_0) = -D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0).$$

Demostración. Construiremos dos funciones auxiliares. En primer lugar, existe $r > 0$ tal que si $h \in (-r, r)$ entonces $\overline{x}_0 + h\overline{u} \in U$. Por ello, definimos $g : (-r, r) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mediante

$$g(t) = \frac{f(\overline{x}_0 + t\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{t}.$$

Tenemos que, por hipótesis, existe

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + t\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{t} = D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0).$$

Ahora, definamos $k : (-r, r) \to (-r, r)$ dada por $k(h) = -h$. Claramente tenemos que $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Para continuar usaremos el siguiente resultado de Cálculo I.

Lema 4. *Sean $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $\ell \in (c, d) \subset \mathbb{R}$. Consideremos $\alpha : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ y $\beta : (c, d) \setminus \{\ell\} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $\alpha((a, b) \setminus \{x_0\}) \subset (c, d) \setminus \{\ell\}$. Si se cumple que*

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \ell \ \text{ y } \lim_{y\to \ell} \beta(y) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0} (\beta \circ \alpha)(x) = L.$$

Vemos que k y g cumplen las condiciones del Lema 4, así que también existe $\lim_{h\to 0} (g \circ k)(h)$ y además

$$\lim_{h\to 0} (g \circ k)(h) = D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0).$$

Para continuar, notemos que

$$\begin{aligned} D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0) &= \lim_{h\to 0} (g \circ k)(h) \\ &= \lim_{h\to 0} g(-h) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 - h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{-h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 - h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 - h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h} = -D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0). \tag{3}$$

Finalmente, por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} D_{-\overline{u}} f(\overline{x}_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 - h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h} \\ &= -D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Esto prueba lo deseado. ■