Ayudantía 25
Ejemplos y contraejemplos con funciones derivables

Como se ha indicado en las sesiones anteriores, usaremos $\mathscr{B}_0 = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ para referirnos a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\mathscr{B} = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ para referirnos a otra *base ortonormal* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función donde U es un conjunto abierto y consideremos $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo. Si para todo par de puntos $\overline{x}, \overline{y} \in U$ tales que $\overline{x} - \overline{y} = \lambda \overline{e}_i$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$ (es decir, f no depende de la variable $\overline{x}_i$), entonces para toda $\overline{x} \in U$ existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ y además

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = 0.$$

¿Se cumple lo recíproco? ¿Es necesaria otra hipótesis sobre el conjunto U?

Solución. Note que la hipótesis acerca de dos puntos nos sugiere de inmediato utilizar la **Proposición 8** de la **Clase 31**, sin embargo, por ahora no será necesario utilizarla. Así, procedamos a la prueba.

Sea $\overline{x} \in U$. Queremos demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h\overline{e}_i) - f(\overline{x})}{h} = 0,$$

ya que por definición de derivada parcial obtendríamos el resultado deseado. Ahora, como U es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subset U$. Notemos que si $h \in (-r, r) \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\|(\overline{x} + h\overline{e}_i) - \overline{x}\| = \|h\overline{e}_i\| = |h| < r,$$

por lo cual $\overline{x} + h\overline{e}_i \in B_r(\overline{x}) \subset U$. En virtud de esto último, para toda $h \in (-r, r)$ se cumple que

$$(\overline{x} + h\overline{e}_i) - \overline{x} = h\overline{e}_i,$$

así que por la hipótesis obtenemos que

$$f(\overline{x} + h\overline{e}_i) = f(\overline{x}).$$

Todo lo anterior demuestra que si $h \in (-r, r)$ y $h \neq 0$ entonces

$$\frac{f(\overline{x} + h\overline{e}_i) - f(\overline{x})}{h} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h\overline{e}_i) - f(\overline{x})}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Esto termina la primera parte.

Pasemos a responder la preguntas. El recíproco del enunciado es FALSO. Para ello, debemos exhibir una función definida en un conjunto abierto, cuya i-ésima derivada parcial sea nula y que existan dos puntos que difieran en un múltiplo escalar de $\overline{e}_i$ pero cuyas imágenes bajo f sean distintas.

CONTRAEJEMPLO. Sea $f : B_1(0,0) \cup B_1(3,0) \subset \mathbb{R}^2 \to R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in B_1(0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) \in B_1(3,0). \end{cases}$$

Notamos que para toda (a,b) en el dominio de f se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$

(Demuestre la igualdad anterior.)

Sin embargo, $(0,0), (3,0) \in B_1(0,0) \cup B_1(3,0)$,

$$(0,0) - (3,0) = (-3,0) = -3(1,0) = -3\overline{e}_1,$$

pero $f(0,0) = 0 \neq 1 = f(3,0)$. Esto termina el contraejemplo. †

Finalmente, ¿es posible dar alguna condición sobre U para que el recíproco sea verdadero? La respuesta es SÍ y para demostrarlo usaremos la **Proposición 8** de la **Clase 31** (que podríamos llamar *Teorema del Valor Medio para derivadas parciales*), la cual tiene una hipótesis muy importante: el segmento que une los dos puntos que nos interesan debe estar contenido en el conjunto U. Para asegurar esto, basta pedir que el conjunto U sea CONVEXO. Enunciamos dicho resultado recíproco a continuación.

Lema 2. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con U un conjunto abierto y convexo. Si para cualquier $\overline{x} \in U$ se cumple que existe la i-ésima derivada parcial (con $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo) y además*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = 0,$$

entonces para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in U$ tales que $\overline{x} - \overline{y} = \lambda \overline{e}_i$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$.

Prueba del Lema. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in U$ tales que $\overline{x} - \overline{y} = \lambda \overline{e}_i$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Como U es convexo, entonces $[\overline{x}, \overline{y}] \subset U$, así que tenemos las hipótesis del Teorema del Valor Medio para derivadas parciales, por lo cual, existe $\overline{\xi} \in (\overline{x}, \overline{y})$ tal que

$$\frac{f(\overline{y}) - f(\overline{x})}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\xi}),$$

y como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\xi}) = 0$ por hipótesis, entonces obtenemos que

$$f(\overline{y}) - f(\overline{x}) = 0,$$

de donde

$$f(\overline{y}) = f(\overline{x})$$

como deséabamos. Esto termina la prueba del Lema. ■

Todo lo anterior resuelve el Ejemplo. ■

Para continuar, usaremos una de las interpretaciones de la derivada: es "la mejor aproximación lineal" en puntos cercanos al punto donde calculamos dicha derivada.

Ejemplo 3. Dé una estimación de las siguientes cantidades.

(i). $(0.99e^{0.002})^8$.

(ii). $\left((4.01)^2 + (3.98)^2 + (2.02)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Solución. (i) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (xe^y)^8 = x^8 e^{8y}$. Calculemos la derivada de f en el punto $(1,0)$: para ello obtendremos las derivadas parciales respecto a x y respecto a y, y después usaremos la estrategia indicada por Óscar en la sesión de ayer para obtener explícitamente a $Df(1,0)$.

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x^7 e^{8y}$$

y también

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8x^8 e^{8y},$$

a partir de donde obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 8 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 8.$$

Ahora, para obtener la expresión de la derivada, tenemos que

$$Df(1,0)(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (8x + 8y).$$

Ahora, por la definición de derivada (en este caso en el punto $(1,0)$) sabemos para puntos (x,y) "cercanos" a $(1,0)$ se cumple que el valor de $f(x,y)$ es "cercano" a

$$Df(1,0)((x,y) - (1,0)) + f(1,0).$$

[Para ver esto basta escribir la definición de derivada], así que para aproximar el valor de $f(0.99, 0.02) = (0.99e^{0.02})^8$, haremos el cálculo indicado antes, esto es,

$$\begin{aligned} Df(1,0)((0.99,0.02) - (1,0)) + f(1,0) &= Df(1,0)(-0.01, 0.02) + 1 \\ &= 8(-0.01) + 8(0.02) + 1 \\ &= 1.08 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un valor aproximado de $(0.99e^{0.02})^8$ es 1.08.

(ii) Denotemos $a = \left((4.01)^2 + (3.98)^2 + (2.02)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Para resolver este inciso usaremos la siguiente estrategia: en lugar calcular definir una función que involucre una raíz cuadrada (que sería la idea inmediata), es preferible aproximar primero el valor a^2 y luego sacar raíz cuadrada. Note que aquí no hay problema porque todos los valores son positivos, así que no perdemos información ni incluimos valores extraños al hacer este proceso.

Procedemos a hacer los cálculos. Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Denotemos $\overline{y}_0 = (4.01, 3.98, 2.02)$ y observemos que nos interesa aproximar el valor de $f(\overline{y}_0) = a^2$. Como $\overline{x}_0 = (4,4,2)$ es un punto cercano a $\overline{y}_0$, calcularemos la derivada de f en $\overline{x}_0$. En primer lugar, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z,$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) = 8 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) = 8 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0) = 4.$$

Calculamos la derivada de f en $\overline{x}_0$:

$$Df(\overline{x}_0)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (8x + 8y + 4z).$$

Esta vez, para aproximar el valor de $f(\overline{y}_0)$ calculamos

$$\begin{aligned} Df(\overline{x}_0)(\overline{y}_0 - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0) &= Df(\overline{x}_0)((4.01, 3.98, 2.02) - (4, 4, 2)) + f(4, 4, 2) \\ &= Df(\overline{x}_0)(0.01, -0.02, 0.02) + 36 \\ &= 8(0.01) + 8(-0.02) + 4(0.02) + 36 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Por lo tanto, una aproximación para $a^2 = f(\overline{y}_0)$ es 36, por lo cual, una aproximación para el valor deseado a es 6. ■

Concluimos esta sesión con un ejemplo que le invita a que sea cuidadoso cuando haga afirmaciones acerca de funciones derivables en un punto.

Ejemplo 4. Exhiba de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sólo sea derivable en $(0, 0)$.

Solución. Vamos a generalizar una función que posiblemente el lector vio en su curso de Cálculo I. Recordemos que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es derivable en 0 y discontinua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (si el lector no vio esta función o una similar en su primer curso de cálculo, lo invitamos a que demuestre las afirmaciones anteriores). La pregunta natural es: ¿cómo extender esta función a $\mathbb{R}^2$? Aunque hay varias maneras, quizá una de las más sencillas es la siguiente: note que para valores de $x \notin \mathbb{Q}$ se calcula $x^2 = |x|^2$, por lo cual, de manera análoga podríamos pedir el cuadrado de la norma. Veamos que esto funciona.

Afirmación. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 + y^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

únicamente es derivable en $(0, 0)$.

Para demostrarlo estudiemos primero los puntos $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Note que tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Supongamos que $x_0 \neq 0$ y $x_0 \in \mathbb{Q}$. Entonces $f(x_0, y_0) = 0$. Ahora, la sucesión $\{(x_0 + \frac{1}{k}, y_0)\}$ converge a (x_0, y_0) y, como $\overline{x}_0 \in \mathbb{Q}$, se cumple que $x_0 + \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$ para toda $k \in \mathbb{N}$; por lo anterior, para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x_0 + \dfrac{1}{k}, y_0) = 0$, de donde la sucesión $\{f(x_0 + \dfrac{1}{k}, y_0)\}$ converge a 0. Por otro lado, la sucesión $\{(x_0 + \dfrac{\pi}{k}, y_0)\}$ también converge a (x_0, y_0); pero $x_0 + \dfrac{\pi}{k} \notin \mathbb{Q}$ porque $\dfrac{\pi}{k} \notin \mathbb{Q}$, así que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(x_0 + \dfrac{\pi}{k}, y_0) = (x_0 + \dfrac{\pi}{k})^2 + y_0^2$, por lo cual la sucesión $\{f(x_0 + \dfrac{\pi}{k}, y_0)\}$ converge a $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$. Lo anterior implica que f no es continua en (x_0, y_0). Por lo tanto, f no es derivable en (x_0, y_0).

Caso 2. Supongamos que $x_0 \neq 0$ y $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Entonces $f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 \neq 0$. Por un lado tenemos que la sucesión $\{(x_0 + \dfrac{1}{k}, y_0)\}$ converge a (x_0, y_0); ya que $x_0 \notin \mathbb{Q}$, se tiene que $x_0 + \dfrac{1}{k} \notin \mathbb{Q}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, así que $f(x_0 + \dfrac{1}{k}, y_0) = (x_0 + \dfrac{1}{k})^2 + y_0^2$, por lo cual la sucesión $\{f(x_0 + \dfrac{1}{k}, y_0)\}$ converge a $x_0^2 + y_0^2$. Por otro lado, *sabemos* que existe una sucesión $\{r_k\}$, con $r_k \in \mathbb{Q}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, que converge a x_0, por lo cual, la sucesión $\{(r_k, y_0)\}$ converge a (x_0, y_0); también, $f(r_k, y_0) = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo cual la sucesión $\{f(r_k, y_0)\}$ converge a 0. Lo anterior implica que f no es continua en (x_0, y_0). Por lo tanto, f no es derivable en (x_0, y_0).

Caso 3. Supongamos que $x_0 = 0$. Como $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, entonces $y_0 \neq 0$. Tenemos que la sucesión $\{(\dfrac{1}{k}, y_0)\}$ converge a $(0, y_0)$ y también $f(\dfrac{1}{k}, y_0) = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo cual la sucesión $\{f(\dfrac{1}{k}, y_0)\}$ converge a 0. Ahora, la sucesión $\{(\dfrac{\pi}{k}, y_0)\}$ también converge a $(0, y_0)$, y como $\dfrac{\pi}{k} \notin \mathbb{Q}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(\dfrac{\pi}{k}, y_0) = (\dfrac{\pi}{k})^2 + y_0^2$, de donde la sucesión $\{f(\dfrac{\pi}{k}, y_0)\}$ converge a $y_0^2 \neq 0$. Por lo tanto, f no es continua en $(0, y_0)$. Esto implica que f no es derivable en $(0, y_0)$ cuando $y_0 \neq 0$.

Así, a partir de los Casos 1, 2 y 3 obtenemos que f no es derivable en puntos distintos de $(0,0)$. Falta demostrar que f es derivable en $(0,0)$.

Afirmación. La derivada $Df(0,0)$ de f en $(0,0)$ es la función constante cero, es decir, la derivada es la función lineal $Df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Df(0,0)(x,y) = 0$.

Para demostrar la Afirmación basta ver que se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (Df(0,0)((x,y) - (0,0)) + f(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0,$$

o bien, al sustituir los valores $f(0,0) = 0$ y $Df(0,0)((x,y) - (0,0)) = 0$ (porque proponemos que la derivada es la función constante cero) y al simplificar, notamos que sólo tenemos que probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Lo haremos por definición de límite. Sea $\varepsilon > 0$. Proponemos que $\delta = \varepsilon$. Sea $(x,y) \in \dot{B}_\delta(0,0)$, entonces $0 < \|(x,y)\| < \delta$. Ahora, si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x,y) = 0$ y en este caso

$$\left| \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \right| = \left| \frac{0}{\|(x,y)\|} \right| = 0 < \varepsilon.$$

Por otro lado, si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $f(x,y) = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$, así que en este caso se cumple que

$$\left| \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \right| = \left| \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} \right| = \|(x,y)\| < \delta = \varepsilon.$$

Esto prueba el límite deseado. Por lo tanto, f es derivable en $(0,0)$ y la derivada $Df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $Df(0,0)(x,y) = 0$. Esto termina la prueba. ∎