Ayudantía 26
Cambio de coordenadas y plano tangente

La primera parte de esta sesión está dedicada a explicar cómo cambia la expresión de la derivada de una función al aplicar un cambio de coordenadas. En la segunda parte veremos un ejemplo de cálculo del plano tangente a la gráfica de una función de dos variables (con imagen en $\mathbb{R}$).

Derivada y cambio de coordendas

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con U un conjunto abierto, y $\overline{x}_0 \in U$. Supongamos que f es derivable en $\overline{x}_0$. Ya sabemos que la derivada $Df(\overline{x}_0)$ puede expresarse como matriz en términos de una base ortonormal $\mathscr{B}_1 = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ mediante

$$Df(\overline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

por lo cual, si $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas $(u_1, \dots, u_n)$ en la base $\mathscr{B}_1$, entonces

$$\begin{aligned} Df(\overline{x}_0)(\overline{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Una vez recordado lo anterior, procedamos a estudiar el cambio de coordenadas. Consideremos el sistema coordenado $x_1', \dots, x_n'$ asociado a la base ortonormal $\mathscr{B}_2 = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y consideremos la expresión de esta base en términos de la base $\mathscr{B}_1$, esto es, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\overline{v}_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni}) = a_{1i}\overline{e}_1 + \cdots + a_{ni}\overline{e}_n,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i'}(\overline{x}_0) &= D_{\overline{v}_i} f(\overline{x}_0) \\ &= Df(\overline{x}_0)(\overline{v}_i) \\ &= a_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) + \cdots + a_{ni} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtuvo usando que la derivada es una función lineal. La ecuación anterior nos permite obtener las derivadas parciales de f respecto a las variables $x_1', \dots, x_n'$ en términos de las variables $x_1, \dots, x_n$.

Para concluir esta sección establezcamos qué relación existe entre las matrices asociadas a la derivada $Df(\overline{x}_0)$ en los dos sistema de referencia anteriores. A partir de las ecuaciones anteriores, y de manera totalmente análoga a lo realizado en el Interludio de Álgebra Lineal, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1'}(\overline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n'}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

y, por la ortonormalidad de la matriz (el lector puede revisar esto en las notas del interludio de álgebra lineal), también obtenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x'_1}(\overline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x'_n}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Plano tangente a la gráfica de una función

En esta sección usaremos la **Definición 7** de la **Clase 33** de plano tangente a la gráfica de una función derivable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 1. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2$, en el punto $(1,0,2)$.

Solución. Vemos que $f(1,0) = 2$, por lo cual el problema tiene sentido. Calculemos las derivadas parciales en puntos cercanos a $\overline{x}_0 = (1,0)$. Tenemos que (si $(x,y) \neq (0,0)$):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y,$$

que en $(1,0)$ valen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Para aplicar la **Definición 7** de la **Clase 33** resta ver que f es derivable en $(1,0)$, así que proponemos $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 3x \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(x,y) - [L((x,y)-(1,0)) + f(1,0)] &= \sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 - [3(x-1)+2] \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 - 3x + 1 \\ &= \sqrt{x^2+y^2} - x + \|(x-1,y)\|^2, \end{aligned}$$

por lo cual, para demostrar que L cumple la definición de la derivada, basta con probar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - [L((x,y)-(1,0)) + f(1,0)]}{\|(x-1,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x + \|(x-1,y)\|^2}{\|(x-1,y)\|}$$

pero

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\|(x-1,y)\|^2}{\|(x-1,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \|(x-1,y)\| = 0$$

por lo cual nos falta demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\|(x-1,y)\|} = 0. \tag{2}$$

Pero esto se obtiene porque si $(x,y) \in \dot{B}_{\frac{1}{2}}(1,0)$ (que son puntos "cercanos" a $(1,0)$), entonces $\|(x,0)\| = |x| = x > 0$, de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\|(x-1,y)\|} &= \frac{x^2+y^2-x^2}{\|(x-1,y)\|(\sqrt{x^2+y^2}+x)} \\
&= \frac{y^2}{\|(x-1,y)\|(\|(x,y)\|+x)} \\
&= \frac{y^2}{\|(x-1,y)\|(\|(x,y)\|+\|(x,0)\|)}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Ahora, como para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$|y| \leq \|(x-1,y)\|,$$

por lo cual

$$|y|(\|(x,y)\|+\|(x,0)\|) \leq \|(x-1,y)\|(\|(x,y)\|+\|(x,0)\|). \tag{4}$$

Luego, notamos que para $(x,y) \in \dot{B}_{\frac{1}{2}}(1,0)$ se cumplen uno de los siguientes dos casos:

Caso 1: Si $y = 0$. Entonces

$$\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\|(x-1,y)\|}\right| = 0 \tag{5}$$

porque $x-1 \neq 0$, así que $\|(x-1,y)\| \neq 0$.

Caso 2: Supongamos que $y \neq 0$. Entonces, a partir (3) y (4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\|(x-1,y)\|}\right| &\leq \left|\frac{y^2}{|y|(\|(x,y)\|+\|(x,0)\|)}\right| \\
&= \frac{|y|}{\|(x,y)\|+\|(x,0)\|}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Procedemos a demostrar (2) utilizando la definición de límite. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|y|}{\|(x,y)\|+\|(x,0)\|} = 0,$$

existe $\delta_1 > 0$ tal que si $(x,y) \in \dot{B}_{\delta_1}(1,0)$, entonces

$$\left|\frac{|y|}{\|(x,y)\|+\|(x,0)\|}\right| < \varepsilon. \tag{7}$$

Proponemos $\delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{1}{2}\right\}$. Si $(x,y) \in \dot{B}_\delta(1,0)$, entonces se cumple el Caso 1 o el Caso 2. Si (x,y) cumple el Caso 1, terminamos porque

$$\left| \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{(\|(x-1,y)\|)} \right| = 0 < \varepsilon;$$

ahora, si (x,y) cumple el Caso 2, entonces por (6) y (7) obtenemos que

$$\left| \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\|(x-1,y)\|} \right| < \varepsilon.$$

Esto implica que se cumple (2). En conclusión

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - [L((x,y)-(1,0)) + f(1,0)]}{\|(x,y)-(1,0)\|} = 0.$$

Por lo anterior, f es derivable en $(1,0)$ y la derivada es $Df(1,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Df(1,0)(x,y) = 3x$. Finalmente, la ecuación del plano tangente a la gráfica G_f de f en el punto $(1,0)$ es

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) + f(1,0),$$

es decir,

$$z = 3(x-1) + 2.$$

En la Figura 1 puede ver una ilustración de la gráfica G_f y del plano tangente en en el punto $(1,0,2)$. ■

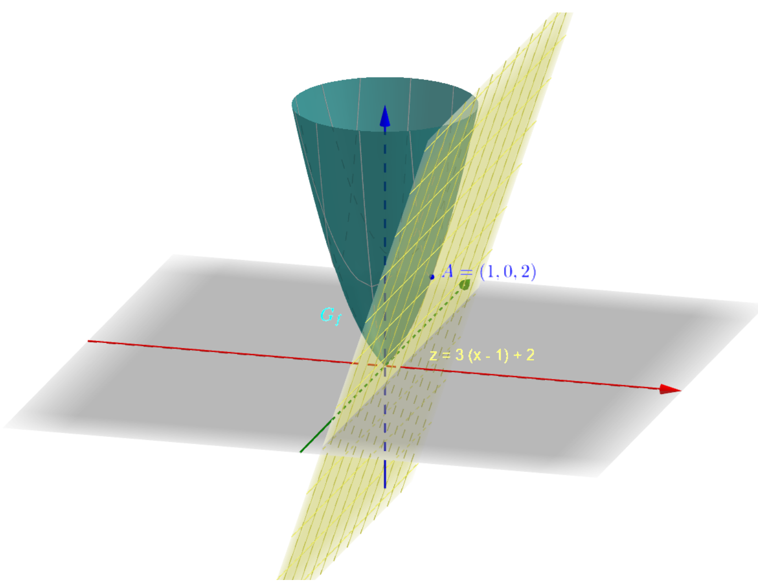

Figura 1: Plano tangente a G_f en el punto $(1,0,2)$.