Ayudantía 27
Continuidad de derivadas parciales y derivabilidad

En esta sesión vamos a explorar un poco el comportamiento de una función en puntos cercanos a un punto donde sí es derivable. En primer lugar, ya sabemos que si una función f es derivable en un punto $\overline{x}_0$ de su dominio, entonces existen todas las derivadas direccionales en todas las direcciones (en particular existen las derivadas parciales) en dicho punto, sin embargo, no podemos decir nada acerca de la existencia de las derivadas parciales en otros puntos. Veamos un ejemplo de este hecho.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = |xy|$. Veamos que f es derivable en $(0,0)$ pero que para ciertos puntos cercanos no existen ni siquiera las derivadas parciales.

Solución. Notamos que por un lado

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h\cdot 0| - |0\cdot 0|}{h} = 0,$$

y por otro

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0\cdot h| - |0\cdot 0|}{h} = 0.$$

Veamos que en efecto la función $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $L(x,y) = 0$ es la derivada de f en $(0,0)$. Para ello, notemos que si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$\frac{f(x,y) - (L((x,y)-(0,0)) + f(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \frac{|xy|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} = \|(x,y)\|,$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (L((x,y)-(0,0)) + f(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (L((x,y)-(0,0)) + f(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0,$$

es decir, L es la derivada de f en $(0,0)$ por definición. Esto prueba la primera parte.

Ahora, consideremos puntos de la forma $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. Para ver si existe la derivada parcial respecto a y debemos calcular el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x_0 h|}{h} = |x_0| \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

el cual sabemos que no existe. Por lo tanto, NO existe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$.

Para finalizar, consideremos puntos de la forma $(0,y_0)$ con $(y_0 \neq 0)$. Esta vez, veremos que no existe la derivada parcial de f respecto a x, para ello, basta notar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,y_0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|hy_0|}{h} = |y_0| \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

no existe. Por lo tanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ TAMPOCO existe. ■

El ejemplo anterior mostró que a pesar de que f es derivable en $\overline{x}_0$, las derivadas parciales no existían para puntos alrededor de $\overline{x}_0$. De hecho, puede pasar que las derivadas parciales existen en todos los puntos alrededor de $\overline{x}_0$ pero que, vistas como funciones, no sean continuas en $\overline{x}_0$, es decir, que no se cumpla el recíproco de la Proposición 7 de la Clase 35 (si las derivadas parciales están definidas alrededor de $\overline{x}_0$ y son continuas en $\overline{x}_0$, entonces f es derivable).

Ejemplo 2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Veamos que f es derivable en $(0,0)$ pero que las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right)\\&=0\end{aligned}$$

porque la función seno es acotada. También se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

Además, si $(x,y)\neq(0,0)$, por las propiedades de las derivadas parciales obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

y además

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Por lo anterior, las derivadas parciales existen para todos los puntos de $\mathbb{R}^2$.

Para continuar, consideremos puntos de la forma $(t,0)$ con $t>0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)=2t\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)-\cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

Luego, como

$$\lim_{t\to0}\left(2t\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

no existe, concluimos que

$$\lim_{t\to0}\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)$$

tampoco existe, lo cual implica que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$. De manera análoga, al considerar puntos de la forma $(0,t)$, con $t>0$, obtenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ tampoco es continua en $(0,0)$. Ya que la proposición mencionada al principio pide explícitamente en sus hipótesis que las derivadas parciales sean continuas en el punto de interés para implicar la derivabilidad, NO podemos aplicar dicha proposición para ver si la función es derivable o no.

En este caso, como la derivada sí existe, proponemos la función que será la derivada y demostramos que lo es. Sea $Df(0,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $Df(0,0)(x,y)=0$, veamos que cumple la definición para ser la derivada:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-(Df(0,0)((x,y)-(0,0))+f(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\|(x,y)\|}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)\|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto f es derivable en $(0,0)$, pero las derivadas parciales, las cuales existen en una bola abierta centrada en $(0,0)$ (ya vimos que de hecho existen en todo $\mathbb{R}^2$), no son continuas en $(0,0)$. ■

Terminamos esta sesión con un lema que será utilizado para probar una de las dos versiones de la Regla de la Cadena (que verán en la próxima sesión con Oscar).

Lema 3. *Sean $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\overline{x}_0\in U$, $(a,b)\subset\mathbb{R}$ tal que $f(U)\subset(a,b)$ y $g:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $f(\overline{x}_0)$. Definimos $\varphi:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ como*

$$\varphi(\overline{x})=\begin{cases}\dfrac{g(f(\overline{x}))-g(f(\overline{x}_0))}{f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)} & si\ f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)\neq 0,\\ g'(f(\overline{x}_0)) & si\ f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)=0.\end{cases}$$

Si f es continua en $\overline{x}_0$, entonces φ es continua en $\overline{x}_0$.

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Denotemos $y_0=f(\overline{x}_0)$. Como g es derivable en $\overline{y}_0$, existe $\delta_1>0$ tal que si $|y-y_0|<\delta_1$ entonces

$$\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

Ya que f es continua en $\overline{x}_0$, existe $\delta_0>0$ tal que si $\overline{x}\in B_{\delta_0}(\overline{x}_0)\cap U$ entonces $|f(\overline{x})-y_0|<\delta_1$.
Proponemos $\delta=\delta_0$. Si $\overline{x}\in B_\delta(\overline{x}_0)\cap U$, entonces $|f(\overline{x})-y_0|<\delta_1$, y obtenemos dos casos:
Caso 1: Si $f(\overline{x})=y_0$, entonces $\varphi(\overline{x})=g'(f(\overline{x}_0))$ y, por lo tanto,

$$|\varphi(\overline{x})-\varphi(\overline{x}_0)|=0<\varepsilon.$$

Caso 2: Si $f(\overline{x})\neq y_0$, entonces por la ecuación (1) obtenemos que

$$|\varphi(\overline{x})-\varphi(\overline{x}_0)|=\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)\right|<\varepsilon.$$

A partir de los Casos 1 y 2 concluimos que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0}\varphi(\overline{x})=g'(f(\overline{x}_0))=\varphi(\overline{x}_0)$. ■