Ayudantía 28
La derivada en otros sistemas coordenados

En esta sesión vamos a explorar la expresión de la derivada en términos de coordenadas polares (en el caso de funciones $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) o en términos de coordenadas cilíndricas o esféricas (en el caso de funciones $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

Para obtener las expresiones de la derivada en otras coordenadas la estrategia consta de dos puntos:

(i). Ya que la derivada es una función lineal, para obtener una representación de ella nos basta con encontrar sus valores en una base (ortonormal) del dominio de nuestra función, que en este caso estará contenido en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$.

(ii). Si la función f que consideramos está expresada en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, nos enfocaremos en obtener la derivada en dichas coordenadas.

La derivada en coordenadas polares

Supongamos que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función derivable en su dominio y que está expresada en términos de coordenadas polares (ρ, θ) para cada punto $\overline{x} \in U$. En primer lugar, nos interesamos en calcular la "derivada respecto a ρ" que, análogamente a lo que se ha hecho para calcular derivadas parciales, significaría calcular el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\rho + h, \theta) - f(\rho, \theta)}{h}, \tag{1}$$

y, de manera similar, nos interesaría la "derivada respecto a θ", es decir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\rho, \theta + h) - f(\rho, \theta)}{h}. \tag{2}$$

Notamos que, al menos en al nivel de expresiones, son muy similares a los cálculos que hacemos para obtener las derivadas parciales respecto a una base ortonormal. Por ello, lo primero que haremos es interpretar dichos límites para, a partir de ello, tratar de relacionarlos con la derivada de f.

Estudiaremos el comportamiento de f en puntos cercanos a $\overline{x}_0 \in U$. Supongamos que $\overline{x} = (\rho_0, \theta_0)$ en coordenadas polares. Para estudiar el límite dado en (1), analicemos el comportamiento de f en puntos $\overline{x}_h = (\rho_0 + h, \theta_0)$ con $h \in \mathbb{R}$. Notamos que dichos puntos están en la recta que pasa por el origen y tiene ángulo θ_0 respecto al eje polar[1]. Ahora, recordamos que podemos obtener las coodenadas cartesianas de $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_h$ respecto a la base canónica como sigue:

$$\overline{x}_0 = (\rho_0 \cos(\theta_0), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0))$$

y también

$$\overline{x}_h = ((\rho_0 + h) \cos(\theta_0), (\rho_0 + h) \operatorname{sen}(\theta_0)).$$

A partir de esta última ecuación vemos que, en coordenadas cartesianas se cummple que

$$\begin{aligned} \overline{x}_h &= (\rho_0 \cos(\theta_0), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0)) + (h \cos(\theta_0), h \operatorname{sen}(\theta_0)) \\ &= \overline{x}_0 + h(\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0)). \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Esto lo vio en sus cursos de geometría analítcia.

Denotemos $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0) = (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0))$. Observe que esto resalta la dependencia de este vector con $\overline{x}_0$. Así, podemos escribir (3) como

$$\overline{x}_h = \overline{x}_0 + h\overline{e}_\rho(\overline{x}_0). \tag{4}$$

Observemos que $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)$ es unitario, por lo cual, usando la ecuación obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0 + h, \theta_0) - f(\rho_0, \theta_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_h) - f(\overline{x}_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)) - f(\overline{x}_0)}{h} \\
&= D_{\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)} f(\overline{x}_0)
\end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación (5) nos dice que la "derivada respecto a ρ" coincide con la derivada direccional en la dirección de $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)$ en el punto $\overline{x}_0$. Nos dice más, como f es derivable en $\overline{x}_0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0 + h, \theta_0) - f(\rho_0, \theta_0)}{h} = Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)), \tag{6}$$

porque recordamos que podemos calcular las derivadas direccionales evaluando la derivada en las direcciones que nos interesen.

Continuemos ahora con un análisis similar para la "derivada respecto a θ". Esta vez, denotemos por $\overline{x}^h$ a puntos en U con coordenadas polares dadas por $(\rho_0, \theta_0 + h)$ con $h \in \mathbb{R}$. Observamos que todos los puntos $\overline{x}^h$ están contenidos en la circunferencia con centro en el origen y radio ρ_0, pues siempre están a la misma distancia del origen y únicamente se va variando su ángulo[2]. Recordamos que dicha circunferencia se puede parametrizar (en coordenadas cartesianas respecto a la base canónica) con $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(h) = (\rho_0 \cos(\theta_0 + h), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0 + h)).$$

Note que, en particular, $\gamma(0) = \overline{x}_0$. Con base en esto, obtenemos que el límite dado en (2) (el punto $\overline{x}_0$) cumple que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0 + h) - f(\rho_0, \theta_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(\gamma(0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\gamma)(h) - (f\circ\gamma)(0)}{h} \\
&= (f\circ\gamma)'(0).
\end{aligned} \tag{7}$$

Ya que f es derivable en $\overline{x}_0$ por hipótesis y γ es derivable en 0, podemos usar la regla de la cadena para calcular $(f\circ\gamma)'(0)$. Así, (7) queda expresado como

$$\begin{aligned}
(f\circ\gamma)'(0) &= \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\
&= \nabla f(\overline{x}_0) \cdot (-\rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0), \rho_0 \cos(\theta_0)) \\
&= \rho_0 \nabla f(\overline{x}_0) \cdot (-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0)) \\
&= \rho D f(\overline{x}_0)(-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0))
\end{aligned} \tag{8}$$

[2]Esto es una explicación somera. Nuevamente, estos hechos forman parte de sus cursos de geometría analítica.

Denotemos $\overline{e}_\theta(\overline{x}_0) = (-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0))$. Vemos que $\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)$ es unitario y, además, es ortogonal a $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)$, por lo cual, $\mathscr{B}_{\overline{x}_0} = \{\overline{e}_\rho(\overline{x}_0), \overline{e}_\theta(\overline{x}_0)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Con esta información (y suponiendo que $\rho_0 \neq 0$), a partir de (8) obtenemos que

$$Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)) = \frac{1}{\rho_0} \lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0 + h) - f(\rho_0, \theta_0)}{h}. \tag{9}$$

En la siguiente definición formalizamos parte del desarrollo anterior.

Definición 1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función expresada en términos de las coordenadas polares (ρ, θ) de cada punto $\overline{x} \in U$. Supongamos que $\overline{x}_0 \in U$ tiene coordenadas polares (ρ_0, θ_0). Definimos:

(i). La derivada parcial de f respecto a ρ en $\overline{x}_0$, que denotamos por $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0)$, como

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0 + h, \theta_0) - f(\rho_0, \theta_0)}{h}.$$

(ii). La derivada parcial de f respecto a θ en $\overline{x}_0$, que denotamos por $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0)$, como

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0 + h) - f(\rho_0, \theta_0)}{h}.$$

Con la notación introducida en la definición anterior procedemos a resolver el problema planteado al principio. Supongamos que f es derivable en $\overline{x}_0$ y que $\overline{x}_0 \neq (0,0)$, entonces, como $\mathscr{B}_{\overline{x}_0}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, por las ecuaciones (6) y (9), sabemos que la derivada $Df(\overline{x}_0)$ tiene asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)) & Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

y también el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0), \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) \right). \tag{11}$$

La ecuación (11) significa que

$$\nabla f(\overline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0)\overline{e}_\rho(\overline{x}_0) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0)\overline{e}_\theta(\overline{x}_0),$$

es decir, las coordenadas del gradiente $\nabla f(\overline{x}_0)$ de f en $\overline{x}_0$ en la base $\mathscr{B}_{\overline{x}_0}$ son $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0)$ y $\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0)$.

Aunque ya hemos resuelto el problema inicial, surge una pregunta importante, ¿cuál es la relación entre ambas expresiones de la derivada? Esto es, ¿cómo hacer el cambio de coordenadas? Para responder esta pregunta usaremos la estrategia empleada en el Interludio de Álgebra Lineal (invitamos al lector a consultarlo si es necesario): notamos que la expresión de los elementos de la base $\mathscr{B}_{\overline{x}_0}$ en términos de la base canónica $\mathscr{B}_0 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ es

$$\begin{aligned} \overline{e}_\rho(\overline{x}_0) &= (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0)) \\ &= \cos(\theta_0)\overline{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta_0)\overline{e}_2 \end{aligned}$$

y

$$\overline{e}_\theta(\overline{x}_0) = (-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0))$$

$$-\operatorname{sen}(\theta_0)\overline{e}_1 + \cos(\theta_0)\overline{e}_2,$$

a partir de donde

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & \operatorname{sen}(\theta_0) \\ -\operatorname{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

y por la condición de ortonormalidad de las bases también se cumple que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\operatorname{sen}(\theta_0) \\ \operatorname{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

A partir de la ecuación (12) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) &= \cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) - \frac{\operatorname{sen}(\theta_0)}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) &= \operatorname{sen}(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) + \frac{\cos(\theta_0)}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Mientras que a partir de la ecuación (13) se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) &= \cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) + \operatorname{sen}(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0), \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) &= -\rho_0\operatorname{sen}(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) + \rho_0\cos(\theta_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Observamos que es importante pedir que $\overline{x}_0 \neq (0,0)$ ya que cualquier par $(0,\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$, da unas coordenadas polares para $(0,0)$, por lo cual obtendríamos que la derivada parcial respecto a θ siempre sería cero y ello impide la elección de una base $\mathscr{B}_{(0,0)}$ ya que la matriz obtenida en la ecuación (13) tendría que tener la segunda columna de ceros, lo cual evita que sea invertible. Por ello, este análisis solamente puede hacerse para $\overline{x}_0 \neq (0,0)$.

Concluimos esta sección con un ejemplo.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada, en coordenadas polares (ρ,θ) para cada punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, por

$$f(\rho,\theta) = (\rho^2 - 2\rho\cos(\theta))^2 - 4\rho^2.$$

Halle $\nabla f(\overline{x})$ (y por tanto la derivada $Df(\overline{x})$) para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solución. Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ con $\overline{x} \neq (0,0)$. Notamos que las derivadas parciales respecto a ρ y respecto a θ son

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}) = 2(\rho^2 - 2\rho\cos(\theta))(2\rho - 2\cos(\theta)) - 8\rho,$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}) = 2(\rho^2 - 2\rho\cos(\theta))(2\rho\operatorname{sen}(\theta)).$$

Ya que claramente ambas funciones son continuas, obtenemos que f es derivable, así que $Df(\overline{x})$ tiene asociada la matriz (en la base ortonormal $\mathscr{B}_{\overline{x}}$):

$$\begin{aligned} Df(\overline{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}) & \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(\rho^2 - 2\rho\cos(\theta))(2\rho - 2\cos(\theta)) - 8\rho & 4\operatorname{sen}(\theta)(\rho^2 - 2\rho\cos(\theta)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, el gradiente deseado es

$$\nabla f(\overline{x}) = \big(2(\rho^2 - 2\rho\cos(\theta))(2\rho - 2\cos(\theta)) - 8\rho\,,\, 4\operatorname{sen}(\theta)(\rho^2 - 2\rho\cos(\theta))\big)$$

Note que, en particular, si $\overline{x}_0 = (2, \pi/2)$ en coordenadas polares, entonces las coordenadas del gradiente de f en $\overline{x}_0$ dadas en la base $\mathscr{B}_{\overline{x}_0}$ son

$$\nabla f(\overline{x}_0) = (16, 16).$$

Note que la función f es la misma que la dada en el **Ejemplo 7** de la **Clase 37** de Óscar (basta hacer el cambio de coordenadas).Además, $\overline{x}_0 = (0, 2)$ en coordenadas cartesianas (respecto a la base canónica $\mathscr{B}_0$). Veamos que todo el desarrollo realizado en la sección nos lleva a la misma respuesta de dichas notas. Para ello, vemos que

$$\begin{aligned}\overline{e}_\rho(\overline{x}_0) &= (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2))\\ &= (0, 1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\overline{e}_\theta(\overline{x}_0) &= (-\operatorname{sen}(\pi/2), \cos(\pi/2))\\ &= (-1, 0),\end{aligned}$$

así que por (12) se tiene que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}16 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-16 & 16\end{pmatrix},\end{aligned}$$

y por lo tanto, la expresión del gradiente de f en $\overline{x}_0$ en coordenadas dadas por la base canónica $\mathscr{B}_0$ es

$$\nabla f(\overline{x}_0) = (-16, 16), \tag{14}$$

que coincide con el resultado obtenido por Óscar. ∎

La derivada en coordenadas cilíndricas

Ya sabemos que las coordenadas cilíndricas son similares a las coordenadas polares salvo que se ha agregado una "altura" (que es la coordenada z). Puesto que el análisis es totalmente análogo al caso de coordenadas polares, dejamos su desarrollo al lector y únicamente presentamos los resultados a los que se espera que obtenga. Es importante recordar que aunque también llamamos z a la tercera coordenada, en realidad es un abuso de notación, por lo cual, en el desarrollo también debe calcular el límite adecuado para dicha coordenada (y dar las explicaciones pertinentes).

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función dada en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) para cada $\overline{x} \in U$. Supongamos que f es derivable en $\overline{x}_0 \in U$, con $\overline{x}_0 \neq (0,0,0)$, cuyas coordenadas cilíndricas (ρ_0, θ_0, z_0), y le asociamos la base ortonormal $\mathscr{B}_{\overline{x}_0} = \{\overline{e}_\rho(\overline{x}_0), \overline{e}_\theta(\overline{x}_0), \overline{e}_z(\overline{x}_0)\}$, donde

$$\begin{aligned}\overline{e}_\rho(\overline{x}_0) &= (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0), 0),\\ \overline{e}_\theta(\overline{x}_0) &= (-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0), 0),\\ \overline{e}_z(\overline{x}_0) &= (0, 0, 1),\end{aligned}$$

Después de definir las derivadas parciales de f respecto a ρ, θ y z, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & \operatorname{sen}(\theta_0) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como se dijo al principio de esta sección, queda como ejercicio para el lector la deducción de los resultados anteriores así como la obtención de las relaciones que faltan entre matrices y la expresión explícita de cada derivada parcial en el sistema de referencia adecuado.

La derivada en coordenadas esféricas

Ya que conocemos las motivaciones, en esta sección modificamos el orden de la exposición en haras de la rapidez. Por ello, iniciamos con la definición de las derivadas parciales que utilizaremos.

Definición 3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función dada en coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) de cada punto $\overline{x} \in U$. Supongamos que $\overline{x}_0 \in U$ tiene coordenadas polares $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ y además que $\overline{x}_0 \neq (0,0,0)$. Definimos

(i). La derivada parcial de f respecto a ρ en $\overline{x}_0$, que denotaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0)$, por

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\rho_0 + h, \theta_0, \varphi_0) - f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)}{h}.$$

(ii). La derivada parcial de f respecto a θ en $\overline{x}_0$, que denotaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0)$, por

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0 + h, \varphi_0) - f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)}{h}.$$

(iii). La derivada parcial de f respecto a φ en $\overline{x}_0$, que denotaremos por $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0)$, por

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0 + h) - f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)}{h}.$$

Supongamos ahora que f es derivable en $\overline{x}_0$ y procedamos a deducir la expresión de $Df(\overline{x}_0)$ en términos de alguna base que dependa de las coordenadas esféricas.

En primer lugar, analicemos la derivada parcial respecto a ρ en $\overline{x}_0$. Denotemos por $\overline{x}_h^1$ a puntos con coordenadas esféricas $(\rho_0 + h, \theta_0, \varphi_0)$. Recordamos que sus coordenadas cartesianas (respecto a la base canónica) están dadas por

$$\overline{x}_0 = (\rho_0 \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \rho_0 \cos(\varphi_0)), \tag{15}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{x}_h^1 &= ((\rho_0 + h)\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), (\rho_0 + h)\operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), (\rho_0 + h)\cos(\varphi_0)) \\ &= (\rho_0 \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \rho_0 \cos(\varphi_0)) \\ &\qquad + h(\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \cos(\varphi_0)) \end{aligned}$$

$$= \overline{x}_0 + h(\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \cos(\varphi_0)). \tag{16}$$

Sea $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0) = (\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0), \cos(\varphi_0))$. Notamos que $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)$ es un vector unitario. Así, (16) se puede escribir como

$$\overline{x}_h^1 = \overline{x}_0 + h\overline{e}_\rho(\overline{x}_0). \tag{17}$$

A partir de lo anterior y usando que f es derivable en $\overline{x}_0$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0 + h, \theta_0, \varphi_0) - f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)) - f(\overline{x}_0)}{h} \\
&= D_{\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)} f(\overline{x}_0) \qquad (18) \\
&= Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)), \qquad (19)
\end{aligned}$$

donde (18) se obtiene por la definición de derivada direccional, mientras que (19) se sigue a partir de la relación entre la derivada direccional y la derivada (global).

Pasamos ahora a estudiar la derivada parcial respecto a θ. Para ello, consideremos puntos $\overline{x}_h^2$ cuyas coordenadas esféricas sean de la forma $(\rho_0, \theta_0 + h, \varphi_0)$. Tenemos que las coordenadas cartesianas de $\overline{x}_h^2$ son

$$\overline{x}_h^2 = (\rho_0\cos(\theta_0 + h)\operatorname{sen}(\varphi_0), \rho_0\operatorname{sen}(\theta_0 + h)\operatorname{sen}(\varphi_0), \rho_0\cos(\varphi_0)),$$

por lo cual es claro que $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_h^2$ están en el mismo plano (el plano $z = \rho_0\cos(\varphi_0)$). Además, si nos fijamos en las primeras dos coordenadas de ambos puntos, esto es, en su proyección sobre el plano XY, observamos que$(\rho_0\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi), \rho_0\operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0))$ y $(\rho_0\cos(\theta_0+h)\operatorname{sen}(\varphi), \rho_0\operatorname{sen}(\theta_0+h)\operatorname{sen}(\varphi_0))$ están en una circunferencia centrada en el origen y de radio $\rho_0\operatorname{sen}(\varphi_0)$ (note que en principio podría tratarse de un punto). Así, podemos parametrizar dicha circunferencia mediante $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(h) = (\rho_0\operatorname{sen}(\varphi_0)\cos(\theta_0 + h), \rho_0\operatorname{sen}(\varphi_0)\operatorname{sen}(\theta_0 + h), \rho_0\cos(\varphi_0)).$$

Ya que $\gamma(0) = \overline{x}_0$ y

$$f(\rho_0, \theta_0 + h, \varphi_0) = f(\overline{x}_h^2) = f(\gamma(h)) = (f \circ \gamma)(h),$$

obtenemos que la derivada parcial de f respecto a θ en $\overline{x}_0$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0 + h, \varphi_0) - f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\gamma)(h) - (f\circ\gamma)(0)}{h} \\
&= (f\circ\gamma)'(0). \qquad (20)
\end{aligned}$$

Puesto que f es derivable en $\overline{x}_0 = \gamma(0)$ y γ es derivable en 0, podemos usar la regla de la cadena, así que (20) queda como

$$\begin{aligned}
(f\circ\gamma)'(0) &= \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\
&= \nabla f(\overline{x}_0) \cdot (-\rho_0\operatorname{sen}(\varphi_0)\operatorname{sen}(\theta_0), \rho_0\operatorname{sen}(\varphi_0)\cos(\theta_0), 0)
\end{aligned}$$

$$= \rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)\nabla f(\overline{x}_0) \cdot (-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0), 0)$$
$$= \rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0) Df(\overline{x}_0)(-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0), 0) \tag{21}$$

Ahora, denotemos $\overline{e}_\theta(\overline{x}_0) = (-\operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0), 0)$. Notamos que $\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)$ es unitario y también es ortogonal a $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)$. Así, a partir de (20) y (21) obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) = \rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0) Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)). \tag{22}$$

Para continuar analicemos la derivada parcial de f respecto a φ. Esta vez, consideremos puntos $\overline{x}_h^3$ cuyas coordenadas polares sean de la forma $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0 + h)$. Notamos que $\overline{x}_0$ y $\overline{x}_h^3$ están en el mismo plano (que incluye al eje Z) cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\theta = \theta_0$. También observamos que están en la esfera con ecuación $\rho = \rho_0$ en coordenadas esféricas[3]. En virtud de lo anterior, los puntos $\overline{x}_h^3$ están en una circunferencia. Ya que las coordenadas cartesianas de $\overline{x}_h^3$ son $(\rho_0 \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + h), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + h), \rho_0 \cos(\varphi_0 + h))$, podemos parametrizar la circunferencia que determinan mediante $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(h) = (\rho_0 \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + h), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + h), \rho_0 \cos(\varphi_0 + h)).$$

Observamos que $\psi(0) = \overline{x}_0$ y también que

$$f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0 + h) = f(\overline{x}_h^3) = f(\psi(h)) = (f \circ \psi)(h).$$

Así, la derivada parcial que nos interesa se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0 + h) - f(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ \psi)(h) - (f \circ \psi)(0)}{h} \\
&= (f \circ \psi)'(0).
\end{aligned} \tag{23}$$

Ahora, como f es derivable en $\overline{x}_0 = \psi(0)$ y ψ es derivable en 0, por la regla de la cadena obtenemos que (23) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
(f \circ \psi)'(0) &= \nabla f(\psi(0)) \cdot \psi'(0) \\
&= \nabla f(\overline{x}_0) \cdot (\rho_0 \cos(\theta_0) \cos(\varphi_0), \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0), -\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)) \\
&= \rho_0 \nabla f(\overline{x}_0) \cdot (\cos(\theta_0) \cos(\varphi_0), \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0), -\operatorname{sen}(\varphi_0)) \\
&= \rho_0 Df(\overline{x}_0)(\cos(\theta_0) \cos(\varphi_0), \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0), -\operatorname{sen}(\varphi_0))
\end{aligned} \tag{24}$$

Sea $\overline{e}_\varphi(\overline{x}_0) = (\cos(\theta_0) \cos(\varphi_0), \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0), -\operatorname{sen}(\varphi_0))$. Notamos que $\overline{e}_\varphi(\overline{x}_0)$ es unitario y también es ortogonal tanto a $\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)$ como a $\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)$, así que

$$\mathscr{B}^e_{\overline{x}_0} = \{\overline{e}_\rho(\overline{x}_0), \overline{e}_\theta(\overline{x}_0), \overline{e}_\varphi(\overline{x}_0)\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Así, a partir de (23) y (24) obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) = \rho_0 Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\varphi(\overline{x}_0)). \tag{25}$$

[3]Estos hechos son estudiados con profundidad en algún curso de geometría analítica

Como $\mathscr{B}^e_{\overline{x}_0}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, usamos las ecuaciones (19), (22) y (25) para obtener la matriz asociada a $Df(\overline{x}_0)$. Para ello, es importante notar que además de que $\overline{x} \neq (0,0,0)$, también se debe asegurar que $\operatorname{sen}(\varphi_0) \neq 0$, por lo cual $\overline{x}_0$ no debe pertenecer al eje Z, así, en este caso, la matriz asociada a $Df(\overline{x})$ en términos de la base $\overline{B}^e_{\overline{x}_0}$ es

$$\begin{pmatrix} Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\rho(\overline{x}_0)) & Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\theta(\overline{x}_0)) & Df(\overline{x}_0)(\overline{e}_\psi(\overline{x}_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)} \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Entonces, la expresión del vector gradiente de f en el punto $\overline{x}_0$, en términos de la base $\mathscr{B}^e_{\overline{x}_0}$, es

$$\nabla f(\overline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0)\,,\ \frac{1}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0)\,,\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) \right). \tag{27}$$

Para finalizar, obtengamos las expresiones de las derivadas parciales usuales en términos de las derivadas parciales definidas en esta sección y viceversa. En primer lugar, ya que los elementos de la base $\mathscr{B}^e_{\overline{x}_0}$ se expresan en términos de la base canónica $\mathscr{B}_0$ como

$$\begin{aligned} \overline{e}_\rho(\overline{x}_0) &= \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0)\overline{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0)\overline{e}_2 + \cos(\varphi_0)\overline{e}_3 \\ \overline{e}_\theta(\overline{x}_0) &= -\operatorname{sen}(\theta_0)\overline{e}_1 + \cos(\theta_0)\overline{e}_2 \\ \overline{e}_\varphi(\overline{x}_0) &= \cos(\theta_0)\cos(\varphi_0)\overline{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta_0)\cos(\varphi_0)\overline{e}_2 - \operatorname{sen}(\varphi_0)\overline{e}_3 \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)} \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0) & \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) \\ -\operatorname{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ \cos(\theta_0)\cos(\varphi_0) & \operatorname{sen}(\theta_0)\cos(\varphi_0) & -\operatorname{sen}(\varphi_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

A partir de lo anterior, por la ortonormalidad de las bases obtenemos que también se cumple que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)} \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) & \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0) & -\operatorname{sen}(\theta_0) & \cos(\theta_0)\cos(\varphi_0) \\ \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0) & \cos(\theta_0) & \operatorname{sen}(\theta_0)\cos(\varphi_0) \\ \cos(\varphi_0) & 0 & -\operatorname{sen}(\varphi_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

Al usar (28) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) &= \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0)\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) - \frac{\operatorname{sen}(\theta_0)}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) + \frac{\cos(\theta_0)\cos(\varphi_0)}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) &= \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0)\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) + \frac{\cos(\theta_0)}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) + \frac{\operatorname{sen}(\theta_0)\cos(\varphi_0)}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0) &= \cos(\varphi_0)\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) - \frac{\operatorname{sen}(\varphi_0)}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Finalmente, al hacer el producto de matrices indicado en (29), se sigue que las entradas de la matriz producto cumplen que

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\overline{x}_0) = \cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) + \operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\varphi_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) + \cos(\varphi_0)\frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\overline{x}_0) = -\rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) + \rho_0 \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\overline{x}_0) = \rho_0 \cos(\theta_0) \cos(\varphi_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0) + \rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0) \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0) - \rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0) \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}_0).$$