Ayudantía 29
Derivadas parciales cruzadas

En esta sesión concluimos el estudio *abstracto* de las derivadas parciales, en particular, nos centramos en dar algunos ejemplos de derivadas parciales cruzadas (también llamadas *derivadas parciales mixtas* por algunos autores).

Los primeros dos ejemplos ilustrarán el uso de la regla de la cadena.

Ejemplo 1 (Teorema de Euler para funciones homogéneas)**.** Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *homogénea* de grado $p \in \mathbb{N}$ si $f(\lambda \overline{x}) = \lambda^p f(\overline{x})$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Si f es homogénea de grado p y derivable en $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\overline{x}_0 \cdot \nabla f(\overline{x}_0) = pf(\overline{x}_0)$.

Demostración. Definamos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(\lambda) = f(\lambda \overline{x}_0) - \lambda^p f(\overline{x}_0).$$

Notemos que para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $g(\lambda) = 0$ porque f es homogénea de grado p. Entonces, $g'(\lambda) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. En particular, se tiene que $g'(1) = 0$.

Por otro lado, como f es derivable en $\overline{x}_0$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(\lambda) = \lambda \overline{x}_0$ es derivable para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \nabla f(h(\lambda)) \cdot h'(\lambda) - p\lambda^{p-1} f(\overline{x}_0) \\ &= \nabla f(\lambda \overline{x}_0) \cdot \overline{x}_0 - p\lambda^{p-1} f(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Luego, al evaluar en $\lambda_0 = 1$ obtenemos que

$$g'(1) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{x}_0 - pf(\overline{x}_0).$$

En conclusión, a partir de los dos valores de $g'(1)$ obtenemos que

$$\overline{x}_0 \cdot \nabla f(\overline{x}_0) = pf(\overline{x}_0).$$

■

Ejemplo 2. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Suponga que f es derivable y que $\nabla f(\overline{x}) = g(\overline{x})\overline{x}$ para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que las esferas en $\mathbb{R}^3$ con centro en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel de f, es decir, f es constante sobre dichas esferas.

Solución. Sea $r > 0$ fijo y denotemos S_r a la esfera de radio r y centro en el origen, esto es,

$$S_r = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\overline{x}\| = r\}.$$

Consideremos $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\overline{a} \neq \overline{b}$ y $\|\overline{a}\| = r = \|\overline{b}\|$, es decir, dos puntos en S_r. Para resolver el problema, nos basta demostrar que $f(\overline{a}) = f(\overline{b})$ ya que son puntos arbitrarios sobre la esfera S_r.

Notemos que existe una curva[1] $\gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(0) = \overline{a}$, $\gamma(1) = \overline{b}$ y $\|\gamma(t)\| = r$ para toda $t \in [0,1]$, es decir, una curva que une $\overline{a}$ con $\overline{b}$ y que está contenida en S_r.

[1] Una manera de construir "geométricamente" tal curva es considerar la intersección del plano que contiene a $(0,0,0)$, $\overline{a}$ y $\overline{b}$, con la esfera S_r, y obtener una parametrización adecuada de dicha intersección.

A continuación veamos que $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función constante. Ya que γ es derivable en $(0,1)$ y f es derivable en $\mathbb{R}^3$, por la regla de la cadena, para toda $t \in (0,1)$ se cumple que

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= (g(\gamma(t))\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= g(\gamma(t)) \left(\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\right).\end{aligned}$$

Ahora, por el **Problema 2** de la **Tarea 05**, ya que $\|\gamma(t)\| = r$ para toda $t \in (0,1)$ por hipótesis (es decir, $\|\gamma(t)\|$ es constante para toda $t \in (0,1)$), se sigue que $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ para toda $t \in (0,1)$[2]. Por lo tanto, para toda $t \in (0,1)$ se satisface que

$$(f \circ \gamma)'(t) = 0,$$

lo que implica que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(f \circ \gamma)(t) = c$$

para toda $t \in (0,1)$.

Como γ es una curva, γ es continua en $[0,1]$, y ya que f es derivable en $\mathbb{R}^3$, ello implica que f es continua en $\mathbb{R}^3$, de donde obtenemos que $f \circ \gamma$ es continua en $[0,1]$. Finalmente, obtenemos que por continuidad se cumple que $(f \circ \gamma)(0) = f(\overline{a}) = c$ y también $(f \circ \gamma)(1) = f(\overline{b}) = c$. Esto prueba lo deseado. ∎

Para continuar, se presenta un contraejemplo: si no se cumplen todas las hipótesis del Teorema de las parciales cruzadas, las segundas derivadas en un punto pueden existir pero no tienen por qué ser iguales.

Ejemplo 3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i). Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii). Pruebe que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(iii). Pruebe que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

(iv). ¿Este ejemplo contradice el **Teorema de las parciales cruzadas**? Justifique su respuesta.

Solución. En primer lugar, observamos que si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$f(x,y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}.$$

[2] Para una prueba directa de este hecho considere la función auxiliar $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \gamma(t) \cdot \gamma(t) = \|\gamma(t)\|^2$, justifique que h es derivable, derive y use que por hipótesis $\|\gamma(t)\|$ es constante.

(i) Usamos las propiedades de las derivadas parciales y obtenemos que, cuando $(x,y) \neq (0,0)$, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(x^3-3xy^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

(ii) Primero calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Para ello usaremos la definición. En primer lugar, notemos que si $h \neq 0$, entonces

$$f((0,0)+h(1,0))-f(0,0) = f(h,0)-0 = 0,$$

por lo cual

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

así que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

De manera similar, notamos que si $h \neq 0$, entonces

$$f((0,0)+h(0,1))-f(0,0) = f(0,h)-0 = 0,$$

de donde obtenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(0,1))-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

(iii) Nuevamente, calculamos las derivadas parciales indicadas utilizando la definición. En primer lugar, si $h \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)+h(0,1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - 0 = \frac{-h^5}{h^4} = -h,$$

y por ello

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)+h(0,1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1,$$

así que
$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$
como se deseaba.

Similarmente, cuando $h \neq 0$, se cumple que
$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+h(1,0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - 0 = \frac{h^5}{h^4} = h,$$
lo cual implica que
$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)+h(1,0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1,$$
esto es,
$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

(iv) Notamos que si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)^2(x^4+12x^2y^2-5y^4) - (x^4y+4x^2y^3-y^5)2(x^2+y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)(x^4+12x^2y^2-5y^4) - 4y(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{x^6+12x^4y^2-5x^2y^4+x^4y^2+12x^2y^4-5y^6-4x^4y^2-16x^2y^4+4y^6}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

Ahora, si consideramos la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{k},0\right)\right\}$, tenemos que converge a $(0,0)$, y además
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{k},0\right) = \frac{\frac{1}{k^6}}{\frac{1}{k^6}} = 1,$$
por lo cual la sucesión $\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{k},0\right)\right\}$ converge a 1. Por otro lado, si consideramos la sucesión $\left\{\left(0,\frac{1}{k}\right)\right\}$, también converge a $(0,0)$ pero
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(0,\frac{1}{k}\right) = \frac{-\frac{1}{k^6}}{\frac{1}{k^6}} = -1,$$
y por ello la sucesión $\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(0,\frac{1}{k}\right)\right\}$ converge a -1. Esto prueba que la función $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

Ya que el Teorema de las parciales cruzadas pide explícitamente en sus hipótesis que ambas segundas derivadas parciales sean continuas en el punto de interés (en este caso, el punto $(0,0)$), este ejemplo **NO contradice** dicho teorema ya que no se cumple una de sus hipótesis. ∎

Para concluir esta sesión veamos que, bajo hipótesis adecuadas, es posible tener un "teorema de parciales cruzadas" en el caso de derivadas direccionales.

Ejemplo 4. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en U y $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores unitarios. Pruebe que $D_{\overline{v}}(D_{\overline{u}}f)$ y $D_{\overline{u}}(D_{\overline{v}}f)$ existen y

$$D_{\overline{v}}(D_{\overline{u}}f)(\overline{x}) = D_{\overline{u}}(D_{\overline{v}}f)(\overline{x})$$

para toda $\overline{x} \in U$.

Demostración. Como f es de clase C^2 en U, en particular, f es derivable en U, así, para toda $\overline{x}$ existe $Df(\overline{x})$. Lo anterior implica que para toda $\overline{x} \in U$ existe $D_{\overline{u}}f(\overline{x})$ porque

$$D_{\overline{u}}f(\overline{x}) = Df(\overline{x})(\overline{u}).$$

Por lo anterior, la función $g : U \to \mathbb{R}$, dada por $g(\overline{x}) = D_{\overline{u}}f(\overline{x})$, está bien definida. Por definición de g, tenemos que

$$g(\overline{x}) = Df(\overline{x})(\overline{u}) = \nabla f(\overline{x}) \cdot \overline{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})u_i.$$

Luego, como f es de clase C^2, existen las segundas derivadas parciales, así que para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x})u_i$$

Por lo tanto,

$$\nabla g(\overline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\overline{x})u_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\overline{x})u_i \right). \tag{1}$$

Ya que f es de clase C^2 en U, se tiene que sus segundas derivadas parciales también son continuas en U, así que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ es continua en U porque son combinaciones lineales de las segundas derivadas parciales de f que son funciones continuas. Esto implica que g es una función derivable en U, así que para toda $\overline{x} \in U$ existe $Dg(\overline{x})$, es decir, para toda $\overline{x} \in U$ existe $D(D_{\overline{u}}f)(\overline{x})$ y, de hecho,

$$D(D_{\overline{u}}f)(\overline{x})(\overline{y}) = \nabla g(\overline{x}) \cdot \overline{y} \tag{2}$$

para toda $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

En virtud de lo anterior, para toda $\overline{x} \in U$ existe

$$D(D_{\overline{u}}f)(\overline{x})(\overline{v}) = D_{\overline{v}}(D_{\overline{u}}(f))(\overline{x}).$$

Además, en virtud de (1) y (2) obtenemos que

$$\begin{aligned}
D_{\overline{v}}(D_{\overline{u}}f)(\overline{x}) &= \nabla g(\overline{x}) \cdot \overline{v} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\overline{x})u_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\overline{x})u_i \right) \cdot (v_1, \ldots, v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\overline{x})u_i v_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\overline{x})u_i v_n \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\overline{x})u_1 v_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x})u_n v_1 \right) + \cdots +
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x})u_1 v_n + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\overline{x})u_n v_n\right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\overline{x})u_1 v_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x})u_1 v_n\right) + \cdots +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x})u_n v_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\overline{x})u_n v_n\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\overline{x})u_1 v_i + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\overline{x})u_n v_i$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\overline{x})v_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\overline{x})v_i\right) \cdot (u_1, \ldots, u_n) \tag{3}$$

Ahora, repitiendo todo lo anterior al cambiar $\overline{u}$ por $\overline{v}$, definimos $h : U \to \mathbb{R}$ como

$$h(\overline{x}) = Df(\overline{x})(\overline{v}) = D_{\overline{v}} f(\overline{x}),$$

y se cumple que

$$\nabla h(\overline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\overline{x})v_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\overline{x})v_i\right), \tag{4}$$

y, por los mismos argumentos que para g, h es derivable y además, para cada $\overline{x} \in U$ se cumple que

$$D(D_{\overline{v}} f)(\overline{x})(\overline{y}) = \nabla h(\overline{x}) \cdot \overline{y} \tag{5}$$

para toda $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

Vemos que a partir de lo anterior, para toda $\overline{x} \in U$ existe

$$D(D_{\overline{v}} f)(\overline{x})(\overline{u}) = D_{\overline{u}}(D_{\overline{v}} f)(\overline{x}).$$

Finalmente, resta demostrar la igualdad entre las derivadas direccionales $D_{\overline{u}}(D_{\overline{v}} f)(\overline{x})$ y $D_{\overline{v}}(D_{\overline{u}} f)(\overline{x})$. Para ello, usamos (4) y (5) y obtenemos que

$$D_{\overline{u}}(D_{\overline{v}} f) = \nabla h(\overline{x}) \cdot \overline{u}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\overline{x})v_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\overline{x})v_i\right) \cdot (u_1, \ldots, u_n) \tag{6}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\overline{x})v_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\overline{x})v_i\right) \cdot (u_1, \ldots, u_n) \tag{7}$$

donde el paso de (6) a (7) se obtiene por el Teorema de las parciales cruzadas pues todas las segundas derivadas parciales son continuas (para toda $\overline{x} \in U$) porque f es de clase C^2 (en U). Finalmente, a partir de (3) y (7) se sigue que

$$D_{\overline{v}}(D_{\overline{u}} f)(\overline{x}) = D_{\overline{u}}(D_{\overline{v}} f)(\overline{x})$$

para toda $\overline{x} \in U$. Esto termina la prueba. ∎