Ayudantía 30
Polinomio de Taylor

Lema 1. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$ *y* $r > 0$ *tales que* $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$ *y* f *es de clase* C^k *en* $B_r(\overline{x}_0)$. *Si* $\overline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ *es tal que* $0 < \|\overline{u}\| < r$, *y* $\gamma : \left(-\frac{r}{\|\overline{u}\|}, \frac{r}{\|\overline{u}\|}\right) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *está dada por*

$$\gamma(t) = \overline{x}_0 + t\overline{u},$$

entonces la función

$$f \circ \gamma : \left(-\frac{r}{\|\overline{u}\|}, \frac{r}{\|\overline{u}\|}\right) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

es de clase C^k *en* $\left(-\frac{r}{\|\overline{u}\|}, \frac{r}{\|\overline{u}\|}\right)$ *y además*

$$(f \circ \gamma)^{(m)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_{i_1} \cdots u_{i_m}$$

para cada $t \in \left(-\frac{r}{\|\overline{u}\|}, \frac{r}{\|\overline{u}\|}\right)$ *y cada* $m \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración. Para simplificar la notación, denotemos $I = \left(-\frac{r}{\|\overline{u}\|}, \frac{r}{\|\overline{u}\|}\right)$. Ahora, observemos que $f \circ \gamma$ está bien definida, para ello, basta ver que para toda $t \in I$ se tiene que

$$\|\gamma(t) - \overline{x}_0\| = \|\overline{x}_0 + t\overline{u} - \overline{x}_0\| = |t| \ \|\overline{u}\| < \frac{r}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\| = r,$$

y por lo tanto, $\gamma(t) \in B_r(\overline{x}_0)$. Ahora, notemos que γ es de clase C^k (de hecho, es de clase C^∞) en I y como f es de clase C^k, entonces $f \circ \gamma$ es de clase C^k porque la composición de funciones derivables es derivable (con la regla de la cadena) y también la composición de funciones continuas es continua.

Resta verificar la expresión de la m-ésima derivada de $f \circ \gamma$ en cada punto. Note que tenemos que ver que el resultado es cierto para cada $1 \leq m \leq k$, por lo cual hay que hacer un proceso recursivo en el cálculo de cada derivada: si calculamos la primera derivada, seremos capaces de hacerlo para todos los demás casos. Por ello, haremos una inducción sobre $m \leq k$.

Base de inducción: Tomemos $m = 1$. Calculemos $(f \circ \gamma)^{(1)}(t) = (f \circ \gamma)'(t)$. Usamos la regla de la cadena y obtenemos que

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(t) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\right) \cdot (u_1, \dots, u_n) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) u_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) u_i \qquad (1)
\end{aligned}$$

Esto termina la base de inducción.

Hipótesis de inducción: Supongamos que el resultado es cierto para $m = k - 1$, es decir, supongamos que para toda $t \in I$ se cumple que

$$(f \circ \gamma)^{(k-1)}(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_{i_1} \cdots u_{i_{k-1}}. \tag{2}$$

Paso inductivo: Supongamos que $m = k$. Al usar la ecuación (2) obtenemos que

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)^{(k)}(t) &= \left((f \circ \gamma)^{(k-1)}\right)' \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_{i_1} \cdots u_{i_{k-1}}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} u_{i_1} \cdots u_{i_{k-1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \circ \gamma\right)(t)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Notemos que para cada conjunto de índices $\{i_1, \ldots, i_{k-1}\} \subset \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$ es una función derivable en $B_r(\overline{x}_0)$ porque f es de clase C^k, así que $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \circ \gamma$ es una función derivable (respecto a t), por lo cual, (3) se puede calcular derivando cada uno de los sumandos ya que es la suma de funciones derivables (note que los términos $u_{i_1} \cdots u_{i_{k-1}}$ son constantes porque son tomados de las coordenadas de $\overline{u}$). Por esto, derivamos $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \circ \gamma$ respecto a t y, por la regla de la cadena, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \circ \gamma\right)(t) &= \nabla\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}\right)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}\right)(\gamma(t)), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}\right)(\gamma(t))\right) \cdot \overline{u} \\ &= \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_1 + \cdots + \frac{\partial^k f}{\partial x_n \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_j \end{aligned} \tag{4}$$

Así, al combinar (3) y (4) obtenemos que

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)^{(k)}(t) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} u_{i_1} \cdots u_{i_{k-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_j\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(\gamma(t)) u_{i_1} \cdots u_{i_k}\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene al reordenar todas las posibles sumas. Esto termina la prueba. ■

Para fijar ideas calculemos algunos polinomios de Taylor de algunas funciones.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \cos(xy)$. Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 $P_{3,f,\overline{x}_0}$ de la función f en los puntos $\overline{x}_0 = (0,0)$ y $\overline{x}_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Solución. Para esto, primero calculemos las derivadas parciales hasta orden 3 y, después, evaluemos en los dos puntos que nos interesan. Así, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\operatorname{sen}(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = y^3\operatorname{sen}(xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) = -2x\cos(xy) + x^2y\operatorname{sen}(xy),$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = -2y\cos(xy) + xy^2\operatorname{sen}(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = -2y\cos(xy) + xy^2\operatorname{sen}(xy),$$

y por simetría

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\operatorname{sen}(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = x^3\operatorname{sen}(xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -\operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = -2y\cos(xy) + xy^2\operatorname{sen}(xy),$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = -2x\cos(xy) + x^2y\operatorname{sen}(xy), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x,y) = -2x\cos(xy) + x^2y\operatorname{sen}(xy).$$

Haremos los cálculos para $\overline{x}_0 = (0,0)$. Por la expresión de las derivadas parciales, notamos que todas valen cero en $(0,0)$, por lo cual

$$\begin{aligned}
P_{3,f,\overline{x}_0}(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2\right.\\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)(y-0)(x-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2\right)\\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)(x-0)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0)(x-0)^2(y-0)\right.\\
&\qquad + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0,0)(x-0)(y-0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(0,0)(x-0)^2(y-0)\\
&\qquad + \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(0,0)(x-0)(y-0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)(x-0)^2(y-0) +\\
&\qquad \left. + \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)(x-0)(y-0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)(y-0)^3\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Procedamos a hacer los cálculos para $\overline{x}_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Los valores de las derivadas parciales en $\overline{x}_1$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_1) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\overline{x}_1) = -1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{x}_1) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_1) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\overline{x}_1) = 1, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(\overline{x}_1) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(\overline{x}_1) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(\overline{x}_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(\overline{x}_1) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\overline{x}_1) = \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(\overline{x}_1) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\overline{x}_1) = \frac{\pi^3}{8}.$$

En virtud de lo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
P_{3,f,\overline{x}_1}(x,y) = {} & f\left(\frac{\pi}{2},1\right) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_1)(y-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_1)(y-1)^2\right) \\
& + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1)\right. \\
& + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) \\
& + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) + \\
& \left. + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\overline{x}_1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\overline{x}_1)(y-1)^3\right) \\
= {} & -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)\right) \\
& + \frac{1}{6}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) + \frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2\right. \\
& + \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) + \frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) \\
& \left. + \frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\pi^3}{8}(y-1)^3\right) \\
= {} & -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(y-1) - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) \\
& + \frac{1}{6}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{3\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) + \frac{3\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\pi^3}{8}(y-1)\right) \\
= {} & -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(y-1) - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) + \frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(y-1) \\
& + \frac{\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1)^2 + \frac{\pi^3}{48}(y-1)^3.
\end{aligned}$$

■

El ejemplo anterior ilustra, por un lado, el significado de la notación que aparece en la definición del polinomio de Taylor (la suma con muchos índices), también que, a pesar de que se calculó el *polinomio de Taylor de grado* 3, después de las operaciones, dicho polinomio puede quedar de grado menor y, finalmente, que el polinomio depende fuertemente del punto donde se está calculando.