Ayudantía 31
Máximos y mínimos

En esta sesión usaremos los resultados vistos en clases anteriores acerca del hessiano para identificar puntos silla de una función, a la vez que ello nos da más herramientas para identificar la naturaleza de los puntos crtícos de una función.

Lema 1. *Si $\overline{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en U, con U un conjunto abierto tal que $\overline{x}_0 \in U$, y se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)\right)^2 < 0, \tag{1}$$

entonces $\overline{x}_0$ es un punto silla de f.

Demostración. Ya que f es de clase C^2 en U, entonces está definida la forma cuadrática hessiana $Hf_{\overline{x}_0}$. Recordemos que $Hf_{\overline{x}_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definido (matricialmente) por

$$\begin{aligned}
Hf_{\overline{x}_0}(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0)y^2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0)y^2.
\end{aligned}$$

Así, podemos definir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(m) = Hf_{\overline{x}_0}(1, m) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0) + m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0)$$

Tenemos que g está definida por una ecuación cuadrática, por lo cual podemos estudiar cuántas raíces tiene. En particular, al usar la fórmula general de solución de ecuaciones cuadráticas nos basta con estudiar el *discriminante*, en este caso,

$$\begin{aligned}
b^2 - 4ac &= \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)\right)^2 - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0) \\
&= 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)\right)^2 - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0) \\
&> 0
\end{aligned}$$

donde la última línea se obtiene al utilizar (1). Lo anterior implica que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas, es decir, g tiene dos raíces diferentes. Ya que g es una función continua, quiere decir que g toma valores positivos y valores negativos, así, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $g(m_1) = Hf_{\overline{x}_0}(1, m_1) > 0$ y $g(m_2) = Hf_{\overline{x}_0}(1, m_2) < 0$.

Ahora, procedemos a la prueba. En primer lugar, como $\overline{x}_0$ es un punto crtíco, por definición puede ocurrir que allí hay un máximo local, hay un mínimo local o es un punto silla. Ya que queremos demostrar que $\overline{x}_0$ es un punto silla, procedemos por contradicción. Supongamos que $\overline{x}_0$

no es un punto silla, entonces en $\overline{x}_0$ hay un máximo local o un mínimo local. Si en $\overline{x}_0$ hay un máximo local, por la **Proposición 9** de la **Clase 41** de Oscar (el recíproco parcial del "criterio de la segunda derivada"), como f es de clase C^2 en U y $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f, se debe cumplir que la hessiana $Hf_{\overline{x}_0}$ de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática seminegativa, es decir, para cualesquiera $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $Hf_{\overline{x}_0}(x,y) \leq 0$, pero esto contradice que $Hf_{\overline{x}_0}(1,m_1) > 0$. Por lo tanto, en $\overline{x}_0$ no hay un máximo. Ahora, de manera análoga, si en $\overline{x}_0$ hay un mínimo, entonces $Hf_{\overline{x}_0}$ debe ser semipositiva, pero esto contradice que $Hf_{\overline{x}_0}(1,m_2) < 0$, por lo cual tampoco hay un mínimo en $\overline{x}_0$. En conclusión, $\overline{x}_0$ es un punto crítico donde no hay un máximo local ni un mínimo local, lo cual implica que $\overline{x}_0$ es un punto silla. Esto termina la prueba. ■

Usaremos el resultado anterior en un ejemplo.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x(x-1)^2 + y^2$. Si $B = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\overline{x}\| \leq 1\}$, halle los puntos en B donde hay máximos o mínimos locales.

Solución. Este problema lo resolveremos por partes. En primer lugar hallaremos los puntos crtícos en $\operatorname{int}(B)$, luego estudiaremos en qué puntos se alcanzan el máximo y mínimo de f sobre $\operatorname{Fr}(B)$ y, finalmente, compararemos los resultados para obtener las conclusiones deseadas.

Para hallar los puntos críticos de f en $\operatorname{int}(B)$ debemos hallar los valores $(x,y) \in \operatorname{int}(B)$ tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x-1)^2 + 2x(x-1) = (x-1)(3x-1) = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y = 0.$$

A partir de la ecuación anterior obtenemos que $y = 0$, mientras que a partir de la primera ecuación obtenemos que $x = 1$ o $x = \frac{1}{3}$. Así, los puntos posibles son $(1,0)$ y $\left(\frac{1}{3},0\right)$, pero solamente $\left(\frac{1}{3},0\right) \in \operatorname{int}(B)$, así que es el único punto crítico. Estudiemos su naturaleza, para ello calculemos las segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x - 4,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2,
\end{aligned}$$

así que al evaluar en $\left(\frac{1}{3},0\right)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3},0\right) &= -2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{3},0\right) &= 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3},0\right) &= 2.
\end{aligned}$$

A partir de lo anterior se sigue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3},0\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{3},0\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{3},0\right)\right)^2 = -2(2) - 0 = -4 < 0,$$

y el Lema 1 implica que $\left(\frac{1}{3},0\right)$ es un punto silla de f.

Lo anterior muestra que los máximos y mínimos se encuentran en $\mathrm{Fr}(B)$. Sabemos que

$$\mathrm{Fr}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 1\},$$

que podemos parametrizar con $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. Definimos $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = (f \circ \gamma)(t) = \cos(t)\,(\cos(t)-1)^2 + \mathrm{sen}^2(t),$$

por lo cual

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= (\cos(t)-1)(3\cos(t)-1)(-\mathrm{sen}(t)) + 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) \\ &= \mathrm{sen}(t)\,(2\cos(t) - (\cos(t)-1)(3\cos(t)-1)) \\ &= \mathrm{sen}(t)\left(-3\cos^2(t) + 6\cos(t) - 1\right). \end{aligned}$$

Para hallar los puntos críticos de g dentro de $(0,2\pi)$, estudiemos en qué puntos $g'(t) = 0$. Primero, vemos que $\mathrm{sen}(t) = 0$ si $t = \pi \in (0,2\pi)$. Por otro lado, la ecuación caudrática $-3x^2 + 6x - 1 = 0$ tiene raíces $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, así que los otros puntos críticos están en $t_0, 2\pi - t_0 \in (0,2\pi)$, donde t_0 cumple que $\cos(t_0) = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$. Ahora, notamos que $g(0) = 0$, $g(t_0) = \frac{4\sqrt{6}}{9} = g(2\pi - t_0)$, $g(\pi) = -4$ y $g(2\pi) = 0$, por lo cual f alcanza su valor máximo sobre $\mathrm{Fr}(B)$ en los puntos

$$\gamma(t_0) = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}}\right) \quad , \quad \gamma(2\pi - t_0) = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, -\sqrt{\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}}\right)$$

y dicho valor máximo es $\frac{4\sqrt{6}}{9}$, mientras que el mínimo lo alcanza en $\gamma(\pi) = (-1,0)$ y su valor es -4.

Finalmente, al comparar los valores de f en los puntos

$$(1,0), \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}}\right), \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, -\sqrt{\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}}\right), (-1,0)$$

concluimos que el mínimo de f sobre B es -4 y lo alcanza en $(-1,0)$, mientras que su valor máximo es $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ y lo alcanza en los puntos

$$\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}}\right), \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, -\sqrt{\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}}\right).$$

Observe que el punto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ no lo consideramos pues hemos mostrado que es un punto silla.

En la Figura 1 puede visualizar los resultados anteriores. ∎

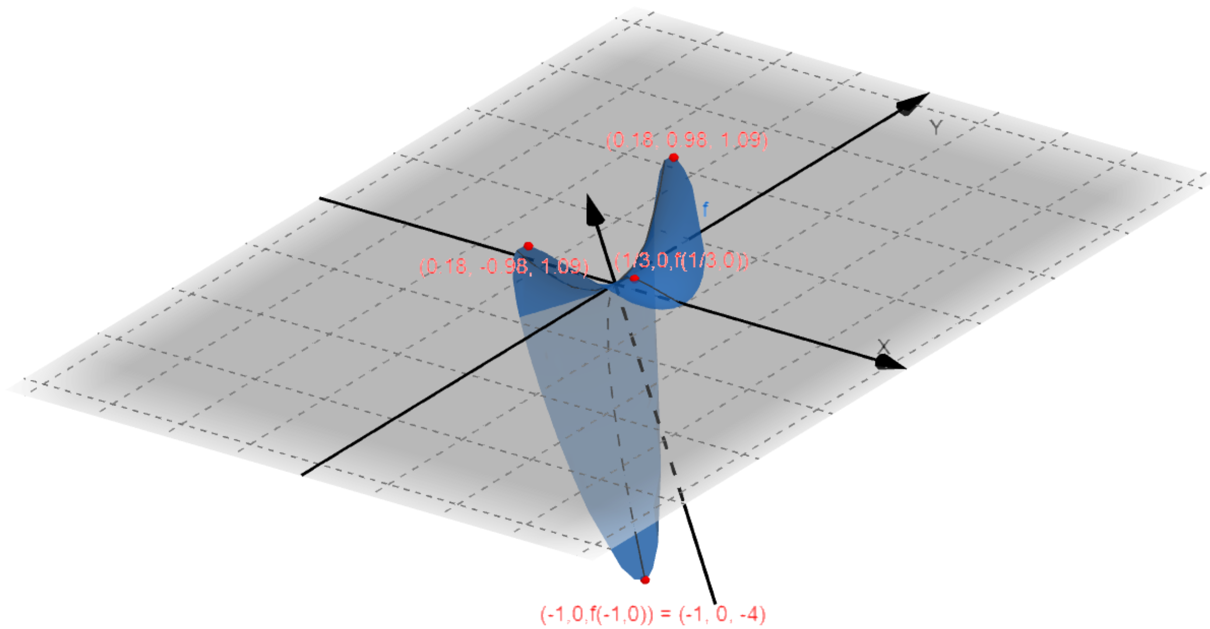

Figura 1: Gráfica de f restringida a B. Se observan los puntos donde se alcanzan el mínimo y el máximo, así como el punto silla.