Última actualización: 18 de mayo de 2022

Clase 30

Comenzamos este capítulo intentando deducir la definición de la derivada de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en un punto dado.

La derivada de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

Recordemos que si $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función y $x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)$ está definida como

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Intentando generalizar lo anterior, ahora para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, consideremos un subconjunto abierto y conexo $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0\in U$ y $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Si $\overline{x}\in U\setminus\overline{x}_0$ tenemos que $f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)$ es un número real, mientras que $\overline{x}-\overline{x}_0$ es un vector, por lo que la expresión

$$\frac{f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)}{\overline{x}-\overline{x}_0}$$

carece de sentido. Intentemos rescatar la idea. Como $\overline{x}_0\in U$ y U es abierto, existe $r>0$ tal que $B_r(\overline{x}_0)\subseteq U$. Así, si $\overline{u}\in\mathbb{R}^n$ es un vector fijo y distinto del vector cero, tenemos que el vector $\overline{x}=\overline{x}_0+h\overline{u}$, donde $h\in\mathbb{R}$, pertenece a $B_r(\overline{x}_0)$ si $|h|\|\overline{u}\|=\|\overline{x}_0+h\overline{u}-\overline{x}_0\|=\|\overline{x}-\overline{x}_0\|<r$. En particular, si $\|\overline{u}\|=1$, entonces el vector $\overline{x}=\overline{x_0}+h\overline{u}$ pertenece a $B_r(\overline{x}_0)$, y por lo tanto a U, si $|h|=\|\overline{x}-\overline{x}_0\|<r$. De esta manera podemos considerar el siguiente cociente

$$\frac{f(\overline{x}_0+h\overline{u})-f(\overline{x}_0)}{h}$$

¿Qué rescatamos y qué no rescatamos? En el caso real, el cociente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, con $x\neq x_0$, mide la razón de cambio que hay entre $f(x)-f(x_0)$ y $x-x_0$. En nuestro caso podemos pensar que el cociente $\dfrac{f(\overline{x}_0+h\overline{u})-f(\overline{x}_0)}{h}$, con $h\neq 0$, mide la razón de cambio entre $f(\overline{x}_0+h\overline{u})-f(\overline{x}_0)$ y $(\overline{x}_0+h\overline{u})-\overline{x}_0$, pues $(\overline{x}_0+h\overline{u})-\overline{x}_0=h\overline{u}$ y $\|h\overline{u}\|=|h|$. Ahora, mientras que en el caso real x tiende a x_0 en "todas las direcciones posibles", en nuestro caso, cuando h tiende a 0, el vector $\overline{x}=\overline{x}_0+h\overline{u}$ tiende a $\overline{x}_0$, pero solo en la dirección determinada por el vector $\overline{u}$. Por esta razón no deberíamos llamar, en caso de que exista, al límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{x}_0+h\overline{u})-f(\overline{x}_0)}{h}$$

la derivada de f en $\overline{x}_0$, pero sí le asignaremos nombre, pues de hecho serán de mucha utilidad.

Antes de continuar, debemos mencionar que a partir de ahora las funciones que consideraremos estarán definidas en un conjunto abierto y conexo $U\subseteq\mathbb{R}^n$.

Definición 1 *Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0\in U$, $\overline{u}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|\overline{u}\|=1$ y $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$. Diremos que f es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$, si existe*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{x}_0+h\overline{u})-f(\overline{x}_0)}{h},$$

en este caso, denotaremos por $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$ a dicho límite y lo llamaremos la derivada direccional de f en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$, es decir,

$$D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h}.$$

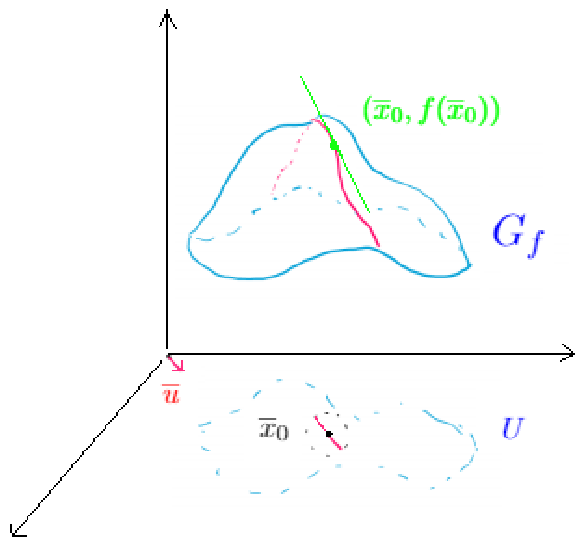

Figura 1: Si $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $\overline{x}_0 \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ es un vector de norma 1, entonces $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$, se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene de intersecar el plano perpendicular al plano XY que tiene la misma "dirección"que la recta en el plano XY determinada por el vector $\overline{u}$ con la gráfica de la función f.

Veamos en el siguiente ejemplo como calcular una derivada direccional.

Ejemplo 2 *Sean $\overline{x}_0, \overline{u} \in \mathbb{R}^2$, con $\overline{u}$ de norma 1, y (x_0, y_0), (u_1, u_2) sus coordenadas en la base canónica, respectivamente. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ como $f(\overline{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$, donde (x, y) son las coordenadas de $\overline{x}$ en la base canónica. Calcule $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0) &= f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0) \\ &= (x_0 + hu_1)^2 + (y_0 + hu_2)^2 - (x_0^2 + y_0^2), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + hu_1)^2 + (y_0 + hu_2)^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0hu_1 + (hu_1)^2 + 2y_0hu_2 + (hu_2)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x_0u_1 + 2y_0u_2 + hu_1^2 + hu_2^2) \\ &= 2(x_0u_1 + y_0u_2). \end{aligned}$$

Así, $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0) = 2(x_0u_1 + y_ou_2)$. ■

Por supuesto, como ya revisaron el "Preludio de Álgebra Lineal", notaron el énfasis que se hizo en que las coordenadas de los respectivos puntos estaban dadas en terminos de la base canónica, pero ¿qué ocurre si consideramos otra base? ¿obtendremos otro resultado? Esto lo aclararan en la siguiente ayudantía. Mientras tanto continuemos con algunas propiedades de las derivadas direccionales.

Proposición 3 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ de norma 1 y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$, entonces*

$$\lim_{h\to 0} f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) = f(\overline{x}_0)$$

Note que ésta proposición es una "versión" del Teorema: Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0. Solo que en nuestro caso obtenemos "continuidad en la dirección del vector $\overline{u}$".

Proposición 4 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ de norma 1 y $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si f y g son derivables en $\overline{x}_0$ en la dirección de $\overline{u}$, entonces:*

(1) $f + g$ es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección de $\overline{u}$ y

$$D_{\overline{u}}(f + g)(\overline{x}_0) = D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0) + D_{\overline{u}}g(\overline{x}_0)$$

(2) si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección de $\overline{u}$ y

$$D_{\overline{u}}(\lambda f)(\overline{x}_0) = \lambda D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$$

(3) fg es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección de $\overline{u}$ y

$$D_{\overline{u}}(fg)(\overline{x}_0) = D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)g(\overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)D_{\overline{u}}g(\overline{x}_0)$$

(4) si g es continua en $\overline{x}_0$ y $g(\overline{x}_0) \neq 0$, f/g es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección de $\overline{u}$ y

$$D_{\overline{u}}(f/g)(\overline{x}_0) = \frac{D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)g(\overline{x}_0) - f(\overline{x}_0)D_{\overline{u}}g(\overline{x}_0)}{g^2(\overline{x}_0)}$$

Recuerde que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $g : U \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{x}_0$ tal que $g(\overline{x}_0) \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $g(\overline{x}) \neq 0$ para toda $\overline{x} \in B_r(\overline{x}_0) \cap U$. Es decir, la función $1/g$ está definida en el abierto $B_r(\overline{x}_0) \cap U$. Es por esta razón que en el inciso (4) de la proposición anterior pedimos la continuidad de g en $\overline{x}_0$, para que f/g esté definida en un conjunto abierto como habíamos acordado. Respecto a las demostraciones de las propociones anteriores solo basta comentar que son consecuencia de los teoremas de límites vistos antes.

Continuaremos con una "regla de la cadena" para derivadas direccionales.

Proposición 5 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ de norma 1 y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(U) \subseteq (a, b)$. Si $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $f(\overline{x}_0)$ y f es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$, entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$ y*

$$D_{\overline{u}}(g \circ f)(\overline{x}_0) = g'(f(\overline{x}_0))D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0).$$

Demostración. Queremos demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\left(f(\overline{x}_0 + h\overline{u})\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{h}$$

existe y para ello consideraremos un par de funciones auxiliares que construimos a continuación. Como $\overline{x}_0 \in U$ y U es abierto, existe $r > 0$ tal que $\overline{x}_0 + h\overline{u} \in B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$ para todo h que cumple que $|h| < r$. Así, $k : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(h) = f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)$ está bien definida. Además, por la Proposición 3,

$$\lim_{h\to 0} k(h) = \lim_{h\to 0} \left(f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)\right) = 0.$$

Ahora, note que si $h \in (-r, r)$ es tal que $k(h) \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{g\left(f(\overline{x}_0 + h\overline{u})\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{h} &= \frac{g\left(f(\overline{x}_0) + k(h)\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{h} \\
&= \left(\frac{g\left(f(\overline{x}_0) + k(h)\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{k(h)}\right)\left(\frac{k(h)}{h}\right) \\
&= \left(\frac{g\left(f(\overline{x}_0) + k(h)\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{k(h)}\right)\left(\frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h}\right).
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando el límite cuando h tiende a 0, obtendríamos el resultado, pero el problema es que lo anterior es posible solo si $k(h) \neq 0$. Consideremos entonces la función $\varphi : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{g\left(f(\overline{x}_0) + k(h)\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{k(h)} & si \quad k(h) \neq 0 \\ g'\left(f(\overline{x}_0)\right) & si \quad k(h) = 0. \end{cases}$$

Note que, para todo $h \in (-r, r) \setminus \{0\}$, se tiene que

$$\frac{g\left(f(\overline{x}_0) + k(h)\right) - g\left(f(\overline{x}_0)\right)}{h} = \varphi(h)\frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h}.$$

Por lo tanto, solo debemos demostrar que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = g'\left(f(\overline{x}_0)\right)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es derivable en $f(\overline{x}_0)$, entonces

$$g'(f(\overline{x}_0)) = \lim_{t\to 0} \frac{g(f(\overline{x}_0) + t) - g(f(\overline{x}_0))}{t}.$$

Así, existe $\delta' > 0$ tal que si $|t| < \delta'$, entonces

$$\left|\frac{g(f(\overline{x}_0) + t) - g(f(\overline{x}_0))}{t} - g'(f(\overline{x}_0))\right| < \varepsilon.$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$, (usando epsilon igual a δ') existe $0 < \delta \leq r$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $|k(h)| < \delta'$.

Afirmamos que si $|h| < \delta$, entonces $|\varphi(h) - g'\left(f(\overline{x}_0)\right)| < \varepsilon$:
Sea h tal que $|h| < \delta$. Note que si $k(h) = 0$, entonces la afirmación se cumple. Supongamos entonces que $k(h) \neq 0$. Como $|h| < \delta$, entonces $|k(h)| < \delta'$, de donde

$$\left|\frac{g(f(\overline{x}_0) + k(h)) - g(f(\overline{x}_0))}{k(h)} - g'(f(\overline{x}_0))\right| < \varepsilon,$$

es decir, $\left|\varphi(h) - g'\left(f(\overline{x}_0)\right)\right| < \varepsilon$. ■