Última actualización: 19 de mayo de 2022

Clase 31

La clase anterior definimos la derivada direccional:

Definición 1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\overline{u}\| = 1$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es derivable en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$, si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h},$$

en este caso, denotaremos por $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$ a dicho límite y lo llamaremos la derivada direccional de f en $\overline{x}_0$ en la dirección del vector $\overline{u}$, es decir,

$$D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{u}) - f(\overline{x}_0)}{h}.$$

En esta ocasión estudiaremos derivadas direccionales, pero en la dirección de algunos vectores destacados.

Derivadas parciales

Iniciamos esta sesión enunciando y demostrando una "versión" del Teorema del Valor Medio para derivadas direccionales. Para ello, es necesario recordar que si $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n$, el segmento de recta que una $\overline{a}$ con $\overline{b}$ es el conjunto $\{\overline{a} + t(\overline{b} - \overline{a}) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$ y que lo denotamos por $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$. Ahora, denotaremos por $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ al conjunto $\{\overline{a} + t(\overline{b} - \overline{a}) \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$.

Proposición 2 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{a}, \overline{b} \in U$ distintos y tales que $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] \subseteq U$, $\overline{u} = \dfrac{\overline{b} - \overline{a}}{\|\overline{b} - \overline{a}\|}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $D_{\overline{u}}f(\overline{x})$ existe para todo $\overline{x} \in \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, entonces existe $\overline{\xi} \in \left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ tal que*

$$\frac{f(\overline{b}) - f(\overline{a})}{\|\overline{b} - \overline{a}\|} = D_{\overline{u}}f(\overline{\xi})$$

Demostración. Note que para cada $t \in \left[0, \|\overline{b} - \overline{a}\|\right]$ se tiene que $\overline{a} + t\overline{u} \in \left[\overline{a}, \overline{b}\right] \subseteq U$, así que la función $g : \left[0, \|\overline{b} - \overline{a}\|\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(\overline{a} + t\overline{u})$ está bien definida. Ahora, como $D_{\overline{u}}f(\overline{x})$ existe para todo $\overline{x} \in \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, tenemos para cada $t \in \left[0, \|\overline{b} - \overline{a}\|\right]$ que

$$\begin{aligned} D_{\overline{u}}f(\overline{a} + t\overline{u}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((a + t\overline{u}) + h\overline{u}\big) - f(\overline{a} + t\overline{u})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(a + (t + h)\overline{u}\big) - f(\overline{a} + t\overline{u})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h}. \end{aligned}$$

Es decir, g es derivable para toda $t \in \left[0, \|\overline{b} - \overline{a}\|\right]$ y $g'(t) = D_{\overline{u}}f(\overline{a} + t\overline{u})$. Entonces, por el Teorema del Valor Medio, tenemos que existe $\xi \in \left(0, \|\overline{b} - \overline{a}\|\right)$ tal que

$$g'(\xi) = \frac{g\left(\|\overline{b} - \overline{a}\|\right) - g(0)}{\|\overline{b} - \overline{a}\|}.$$

Esto es,

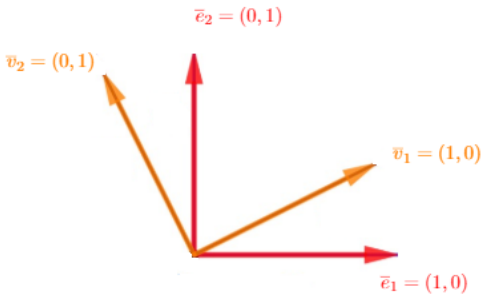
$$D_{\overline{u}} f(\overline{a} + \xi\overline{u}) = \frac{f(\overline{b}) - f(\overline{a})}{\|\overline{b} - \overline{a}\|}.$$

Así, con $\overline{\xi} = \overline{a} + \xi\overline{u}$, se cumple la afirmación. ■

Hasta ahora hemos trabajado con derivadas direccionales en la direccción de un vector unitario $\overline{u}$ "muy arbitrario". Pero hay unos vectores unitarios que nos interesarán bastante en lo que sigue, los vectores de una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Antes de comenzar este análisis vale la pena hacer una observación. Si $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene que

$$\overline{v}_i = 0\overline{v}_1 + \cdots + 1\overline{v}_i + \cdots + 0\overline{v}_n,$$

por lo que, $(0, ..., 1, ..., 0)$ son las coordenadas de $\overline{v}_i$ en esta base. Es decir, al considerar una base ortonormal obtenemos que las cordenadas de cada uno de sus elementos escritas en términos de la misma base coinciden con las expresiones usuales de la base canónica.



Por esta razón, en las siguientes definiciones escribiremos $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ para denotar una base ortonormal.
Ahora sí, analicemos las derivadas direccionales en la dirección de un vector de una base ortonormal: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Si $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \cdots x_n\overline{e}_n = (x_1, ..., x_n)$, entonces $f(\overline{x})$ se puede expresar en términos de estas coordenadas, es decir, $f(\overline{x}) = f(x_1, ..., x_n)$. Luego,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + h\overline{e}_i) - f(\overline{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$$

pues $\overline{x} + h\overline{e_i} = (x_1, ..., x_n) + h(0, ..., 1, ..., 0)$. Como ya lo habrán notado, la única coordenada "afectada" es la i-ésima, lo cual nos lleva a pensar que para obtener $D_{\overline{e}_i} f(\overline{x})$ basta derivar sólo la i-ésima coordenada considerando las demás como constantes. Veamos si esto ocurre con un ejemplo.

Ejemplo 3 *Considere $\{\overline{e}_x, \overline{e}_y\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(\overline{x}) = f(x, y) = 2x^2y^5$, donde (x, y) son las coordenadas de $\overline{x}$ en la base canónica. Calcule $D_{\overline{e}_x} f(\overline{x})$.*

Solución. Note que $f(\overline{x}+h\overline{e}_x) - f(\overline{x}) = f(x+h, y) - f(x, y) = 2(x+h)^2y^5 - 2x^2y^5 = 2y^5(2xh+h^2)$. Así,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{x}+h\overline{e}_x)-f(\overline{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2y^5(2xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}2y^5(2x+h)=4xy^5.$$

Es decir, $D_{\overline{e}_x}f(\overline{x})=4xy^5$. ■

Este ejemplo reforzó nuestra idea de que para hallar derivadas direccionales en la dirección de un vector de una base ortonormal basta derivar la coordenada correspondiente y considerar las demás como constantes. Estas derivadas direccionales tienen un nombre.

Definición 4 *Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0\in U$, $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y $\{\overline{e}_1,...,\overline{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Si $(x_1,...,x_n)$ denotan las coordenadas (variables), respecto a la base mencionada, definimos la derivada parcial de f con respecto de la variable x_i en $\overline{x}_0$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$, como*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)=D_{\overline{e}_i}f(\overline{x}_0).$$

Por definición, las derivadas parciales son derivadas direccionales, por lo que los teoremas para derivadas direccionales valen para derivadas parciales. Consideremos $\{\overline{e}_1,...,\overline{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, en las siguientes proposiciones supondremos que $(x_1,...,x_n)$ denotan las coordenadas (variables), respecto a esta base.

Proposición 5 *Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0\in U$ y $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ existe, entonces*

$$\lim_{h\to 0}f(\overline{x}_0+h\overline{e}_i)=f(\overline{x}_0).$$

Proposición 6 *Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0\in U$ y $f,g:U\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ y $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ existen para alguna $i\in\{1,...,n\}$, entonces*

(1) $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ existe y

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$$

(2) si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ existe y

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$$

(3) $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ existe y

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)g(\overline{x}_0)+f(\overline{x}_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$$

(4) Si g es continua en $\overline{x}_0$ y $g(\overline{x}_0)\neq 0$, $\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ existe y

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)g(\overline{x}_0)-f(\overline{x}_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\overline{x}_0)}{g^2(\overline{x}_0)}$$

Proposición 7 *Sean* $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ *y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que* $f(U) \subseteq (a, b)$. *Si* $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $f(\overline{x}_0)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ *existe para alguna* $i \in \{1, ..., n\}$, *entonces* $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$ *existe y*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = g'(f(\overline{x}_0)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0).$$

Proposición 8 *Sean* $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{a}, \overline{b} \in U$ *distintos tales que* $[\overline{a}, \overline{b}] \subseteq U$ *y* $\overline{b} - \overline{a} = (b - a)\overline{e}_i$ *para algunos* $a, b \in \mathbb{R}$ *y para algún* $i \in \{1, ..., n\}$. *Si* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})$ *existe para todo* $\overline{x} \in [\overline{a}, \overline{b}]$, *entonces existe* $\overline{\xi} \in (\overline{a}, \overline{b})$ *tal que*

$$\frac{f(\overline{b}) - f(\overline{a})}{b - a} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\xi}).$$

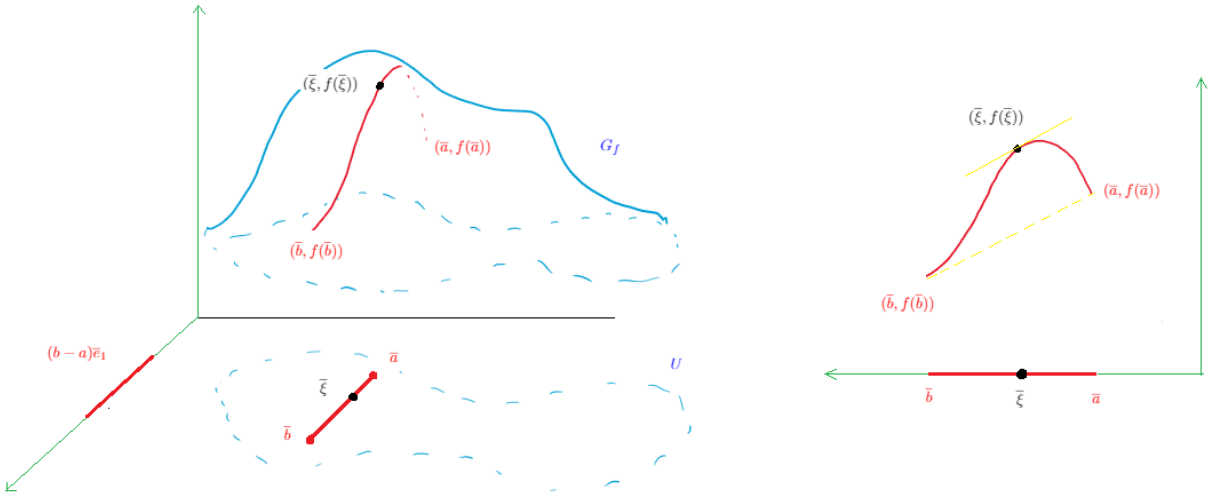


Figura 1: Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, resulta que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(\overline{a}, f(\overline{a}))$ y $(\overline{b}, f(\overline{b}))$ es igual a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\xi})$

Observemos unas cosas respecto a la proposición anterior. Primero, el hecho de que $\overline{b} - \overline{a} = (b - a)\overline{e}_i$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ y para algún $i \in \{1, ..., n\}$ significa que el vector $\overline{b} - \overline{a}$ es paralelo al vector $\overline{e}_i$ de la base canónica. Segundo, esta proposición es un corolario de la Proposición 2 y sólo basta notar que en el caso de que $b - a < 0$ el vector $\overline{u} = -\overline{e}_i$, pero ya vieron en la Ayudantía 24 que $D_{-\overline{e}_i} f(\overline{\xi}) = -D_{\overline{e}_i} f(\overline{\xi})$, así que la demostración se sigue independientemente del signo de $b - a$. Finalmente, en esta versión es más claro el parecido al Teorema del Valor Medio de Cálculo I.