Clase 32

En esta sesión obtendremos la definición de la derivada de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en un punto.

La derivada

En las sesiones anteriores intentamos definir la derivada de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y lo que conseguimos fueron los conceptos de derivadas direccionales y en particular de derivadas parciales. Estas derivadas son muy similares a las derivadas de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y además, como más adelante veremos, resultan muy útiles. Pero aún no hemos logrado definir la derivada de una función en un punto. Lo intentaremos una vez más, en esta ocasión haremos uso de una de las interpretaciones de la derivada vista en Cálculo I.

Recordemos que si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $x_0 \in (a, b)$, entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por la ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Notemos que se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos una recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, entonces tiene una ecuación de la forma $y = m(x - x_0) + f(x_0)$. Si además se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0,$$

entonces afirmamos que f es derivable en x_0 . En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m + m \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} + m \right] \\ &= m. \end{aligned}$$

Es decir, f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = m$. Note que hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 1 *Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en x_0 si y sólo si existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con regla de correspondencia $g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$, tal que*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0.$$

Ahora, respecto a g debemos hacer una observación. Note que $g(x)$ es la traslación de la función $l(x) = mx$ al punto $(x_0, f(x_0))$. Por otro lado, $l(x)$ es una función lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de hecho se puede demostrar que una función $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $l(x) = mx$. Por lo tanto podemos reformular la proposición anterior como sigue:

Proposición 2 Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en x_0 si y sólo si existe una función lineal $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [l(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0.$$

Ahora ya podemos generalizar el concepto de derivada a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en un punto $\bar{x}_0$.

Definición 3 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es derivable en $\bar{x}_0$ si existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0$$

.

Ejemplo 4 Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal y $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que L es derivable en $\bar{x}_0$.

Solución. Note que $L(\bar{x} - \bar{x}_0) = L(\bar{x}) - L(\bar{x}_0)$, pues L es una función lineal. Así,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{L(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + L(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Es decir, L es derivable en $\bar{x}_0$. ■

Note que en el ejemplo anterior la función lineal que nos sirvió fue la misma L , pero ¿existirá otra función lineal que cumpla con la definición? En general, para una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\bar{x}_0 \in U$ ¿existirá más de una función lineal que satisfaga la Definición 3? La respuesta está en la siguiente proposición:

Proposición 5 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\bar{x}_0$. Entonces existe una única función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la Definición 3.

Demostración. Como f es derivable en $\bar{x}_0$ existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la Definición 3, es decir, que satisface

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Ahora, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal que satisface

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [T(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0,$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} - \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [T(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\
&= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)] - f(\bar{x}) + [T(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\
&= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{T(\bar{x} - \bar{x}_0) - L(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\
&= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{(T - L)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}.
\end{aligned}$$

Ahora, si hacemos $\tilde{L} = T - L$ y $\bar{h} = \bar{x} - \bar{x}_0$ (un “cambio de variable” visto en el Ejercicio (11) de la Tarea 03), entonces tenemos que

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \frac{\tilde{L}(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0.$$

Se sigue (por el Ejercicio (12) de la Tarea 03) que $\tilde{L}$ es la función constante cero y de aquí que $L = T$. ■

Dada la proposición anterior, llamaremos a la función L de la Definición 3 **la derivada de f en $\bar{x}_0$** y la denotaremos por $Df(\bar{x}_0)$. Una observación importante es que la derivada de una función en un punto $\bar{x}_0$ es una función lineal.

Ahora que hemos dado la definición de derivada, podríamos preguntarnos si hay una relación entre esta y las derivadas direccionales.

Proposición 6 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ de norma 1. Si f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces existe la derivada direccional de f en $\bar{x}_0$ en la dirección de $\bar{u}$ y

$$D_{\bar{u}}f(\bar{x}_0) = Df(\bar{x}_0)(\bar{u}).$$

Demostración. Debemos demostrar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} = Df(\bar{x}_0)(\bar{u})$, pero esto es equivalente a demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} - Df(\bar{x}_0)(\bar{u}) \right| = 0.$$

Como f es derivable en $\bar{x}_0$ entonces tenemos que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0$ y esto es equivalente a que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \left| \frac{f(\bar{x}) - [Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right| = 0.$$

Haciendo $\bar{x} = \bar{x}_0 + h\bar{u}$, tenemos que $\bar{x}$ tiende a $\bar{x}_0$ cuando h tiende a 0, así que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - [Df(\bar{x}_0)(h\bar{u}) + f(\bar{x}_0)]}{\|h\bar{u}\|} \right| = 0.$$

Así que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0)}{h} - Df(\bar{x}_0)(\bar{u}) \right| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0) - hDf(\bar{x}_0)(\bar{u})}{h} \right| \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(h\bar{u})|}{|h|} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(h\bar{u})|}{\|h\bar{u}\|} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x}_0 + h\bar{u}) - [Df(\bar{x}_0)(h\bar{u}) + f(\bar{x}_0)]|}{\|h\bar{u}\|} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Justo lo que queríamos demostrar. ■

Corolario 7 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Si f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, donde $(x_1, \dots, x_n)$ son las variables determinadas por la base mencionada, y

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = Df(\bar{x}_0)(\bar{e}_i).$$