

Clase 33

Definición 1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es derivable en $\bar{x}_0$ si existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Dado que la función L es única con esta propiedad (lo demostramos) la llamaremos **la derivada de f en $\bar{x}_0$** y la denotaremos por **$Df(\bar{x}_0)$** .

Proposición 2 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ de norma 1. Si f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces existe la derivada direccional de f en $\bar{x}_0$ en la dirección de $\bar{u}$ y

$$D_{\bar{u}}f(\bar{x}_0) = Df(\bar{x}_0)(\bar{u}).$$

Corolario 3 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Si f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, donde $(x_1, \dots, x_n)$ son las variables determinadas por la base mencionada, y

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = Df(\bar{x}_0)(\bar{e}_i).$$

En esta ocasión mostraremos cómo utilizar las derivadas parciales, si existen, para hallar la derivada de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en un punto.

Cómo hallar la derivada usando las derivadas parciales

Antes de comenzar a estudiar más sobre la relación que puede existir entre las derivadas parciales y la derivada debemos hacer unas cuantas observaciones/recordatorios:

Consideremos una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y una base ortonormal $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la base β , es decir, $\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + \dots + x_n\bar{v}_n$, entonces

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) &= L(x_1\bar{v}_1 + \dots + x_n\bar{v}_n) \\ &= x_1L(\bar{v}_1) + \dots + x_nL(\bar{v}_n). \end{aligned}$$

Así, para conocer el valor de L en $\bar{x}$ es suficiente conocer las coordenadas de $\bar{x}$ en la base β y los valores de L en los elementos de β . Ahora, si consideramos la matriz, de $1 \times n$,

$$M_\beta = [a_{11} \ \dots \ a_{1n}],$$

donde $a_{1i} = L(\bar{v}_i)$, decimos que la matriz M_β es la matriz asociada a la función lineal L en la base β . Esta matriz puede ser usada para calcular $L(\bar{x})$ como sigue:

$$\begin{aligned}
L(\bar{x}) &= L(x_1, \dots, x_n) \\
&= [a_{11} \ \cdots \ a_{1n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= M_\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Otra manera de calcular $L(\bar{x})$ es representar a la función lineal L con el vector $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ y usar el producto punto como sigue

$$\begin{aligned}
L(\bar{x}) &= L(x_1, \dots, x_n) \\
&= (L\bar{v}_1, \dots, L\bar{v}_n) \cdot (x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Observación 4 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (expresada en términos de la base β) derivable en $\bar{x}_0$, sabemos que

$$Df(\bar{x}_0)(\bar{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0),$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. De esta manera, la función lineal $Df(\bar{x}_0)$ debe tener asociada la matriz

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \right],$$

o bien, debe estar representada por el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \right).$$

Cuidado: En la observación anterior usamos que f es derivable en $\bar{x}_0$ para hallar las representaciones de $Df(\bar{x}_0)$. Pero, podemos apoyarnos, con cuidado, en esta observación para proponer una función lineal que cumpla con la Definición 1, de la siguiente manera:

Si f es una función para la cual existen todas sus derivadas parciales en el punto $\bar{x}_0$ y queremos demostrar que f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces la función lineal representada por la matriz

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \right],$$

es la mejor candidata para ser la derivada de f en $\bar{x}_0$.

Ejemplo 5 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada en términos de las coordenadas de la base canónica por la siguiente regla de correspondencia

$$f(x, y) = xy.$$

Demuestra que f es derivable en cualquier punto $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Es fácil ver que existen todas las derivadas parciales de f y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0) = y_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0) = x_0.$$

Así que la función lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ representada por la matriz $\begin{bmatrix} y_0 & x_0 \end{bmatrix}$ es nuestra candidata para ser la derivada de f en $\bar{x}_0$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \begin{bmatrix} y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= xy_0 + x_0y. \end{aligned}$$

Luego, $L(\bar{x} - \bar{x}_0) = L(x - x_0, y - y_0) = (x - x_0)y_0 + x_0(y - y_0)$ y de aquí que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right| &= \left| \frac{xy - [(x - x_0)y_0 + x_0(y - y_0) + x_0y_0]}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} \right| \\ &= \frac{|(x - x_0)(y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} \\ &\leq \frac{\|(x - x_0, y - y_0)\|^2}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} \\ &= \|(x - x_0, y - y_0)\| \end{aligned}$$

Se sigue que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0$, es decir, f es derivable en $\bar{x}_0$ y $Df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $Df(x_0, y_0)(x, y) = xy_0 + x_0y$. ■

Ejemplo 6 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada en términos de las coordenadas de la base canónica por la siguiente regla de correspondencia

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Muestre que f es derivable en cualquier punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Note que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existen para todo punto en $\mathbb{R}^2$ y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Ahora, como debemos demostrar que f es derivable en (x_0, y_0) evaluamos en (x_0, y_0) ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0.$$

Calculemos la función lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que propondremos como la derivada de f .

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) &= L(x, y) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 2x_0x + 2y_0y. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)] &= x^2 + y^2 - 1 - [2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 1] \\
&= (x^2 - 2x_0x + x_0^2) + (y^2 - 2y_0y + y_0^2) \\
&= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\
&= \|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [L(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = 0.$$

Por lo tanto f es derivable en $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ y $Df(\bar{x}_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada en términos de la base canónica por $Df(\bar{x}_0)(x, y) = 2x_0x + 2y_0y$. ■

En Cálculo I asociamos la idea de recta tangente con la de derivada y al menos para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ podemos rescatar esta idea. Aprovecharemos el ejemplo anterior para “visualizar” esto.

En el ejemplo anterior mostramos que f es derivable en cualquier punto y de hecho obtuvimos la derivada para cada punto, entonces si consideramos $\bar{x}_0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que $Df(\bar{x}_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada, en términos de la base canónica, por la siguiente regla de correspondencia, $Df(\bar{x}_0)(x, y) = 2(0)x + 2(0)y = 0$. Note que la gráfica de $Df(\bar{x}_0)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, de hecho es el plano XY. Ahora, si trasladamos dicho plano al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (0, 0, -1)$ obtenemos el plano dado por la ecuación $z = -1$, que de hecho es tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 0, f(0, 0))$, vea figura 1.

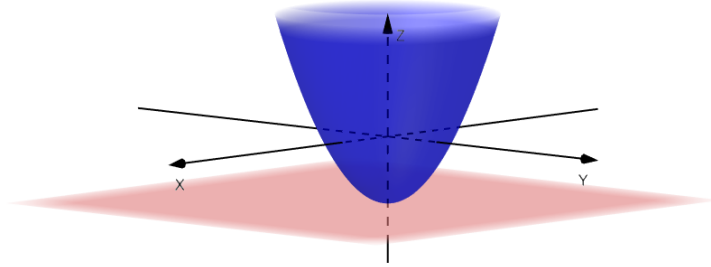


Figura 1

En general, note que la gráfica de la función lineal $Df(\bar{x}_0)(x, y) = 2x_0x + 2y_0y$ es un plano que pasa por el origen. Luego, si trasladamos dicho plano al punto $(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2 - 1)$ obtenemos un plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2 - 1)$, vea figura 2, y que tiene por ecuación

$$z = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 1.$$

Por lo anterior damos la siguiente definición.

Definición 7 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\bar{x}_0$. Diremos que el plano que tiene como ecuación

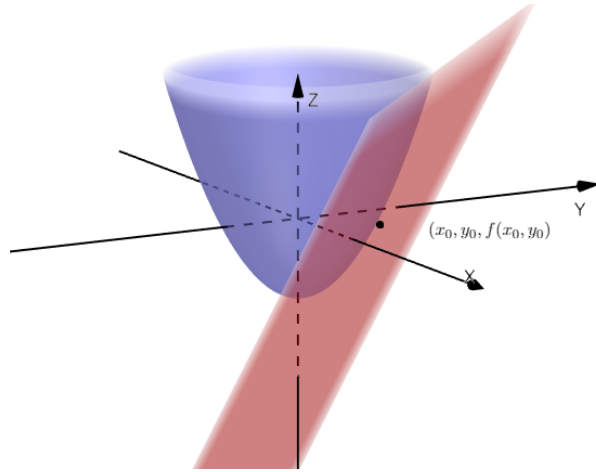


Figura 2

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

es el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$