Última actualización: 31 de mayo de 2022

Clase 35

Proposición 1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$. Entonces existe $\overline{u}_0 \in S^{n-1}$ tal que $D_{-\overline{u}_0} f(\overline{x}_0) \leq D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0) \leq D_{\overline{u}_0} f(\overline{x}_0)$, para todo $\overline{u} \in S^{n-1}$. Si además $Df(\overline{x}_0)$ no es la función constante cero, entonces $\overline{u}_0$ es único.*

Definición 2 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$. Definimos el gradiente de f en $\overline{x}_0$, denotado por $\nabla f(\overline{x}_0)$, como el vector $\nabla f(\overline{x}_0) = D_{\overline{u}_0} f(\overline{x}_0)\overline{u}_0$, donde $\overline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de la proposición anterior.*

Observación 3 *Sean $\beta = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función expresada en términos de las coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ determinadas por la base β. Si f es derivable en $\overline{x}_0$, entonces*

$$\nabla f(\overline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) \right).$$

En esta ocasión deduciremos qué condiciones implican que una función sea derivable en un punto.

¿Qué se necesita para que una función sea derivable en un punto?

Comenzamos esta clase con una consecuencia, seguramente esperada, de la derivabilidad de una función en un punto.

Proposición 4 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en $\overline{x}_0$, entonces f es continua en $\overline{x}_0$.*

Demostración. Debemos demostrar que

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) = 0.$$

Para ello, notemos que para $\overline{x} \neq \overline{x}_0$ se tiene que

$$f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - Df(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) = \frac{f(\overline{x}) - [Df(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} \|\overline{x} - \overline{x}_0\|,$$

de donde

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - Df(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) = \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{f(\overline{x}) - [Df(\overline{x}_0)(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} \|\overline{x} - \overline{x}_0\| = 0.$$

Por otro lado, recordemos que las funciones lineales son continuas y que $Df(\overline{x}_0)$ es una función lineal, así que

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} Df(\overline{x}_0)(\overline{x}-\overline{x}_0) = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) &= \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} [f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - Df(\overline{x}_0)(\overline{x}-\overline{x}_0) + Df(\overline{x}_0)(\overline{x}-\overline{x}_0)] \\ &= \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} [f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - Df(\overline{x}_0)(\overline{x}-\overline{x}_0)] + \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} Df(\overline{x}_0)(\overline{x}-\overline{x}_0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Y así f es continua en $\overline{x}_0$. ■

La pregunta natural, ¿vale el regreso? Y la respuesta es igual que en Cálculo I, NO.

Ejemplo 5 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(\overline{x}) = \|\overline{x}\|.$$

Demuestre que f *no es derivable en* $\overline{0}$.

Solución. Recordemos que si f es derivable en un punto $\overline{x}_0$, entonces existen todas las derivadas direccionales de f. Utilizaremos la contrapositiva de esta afirmación, es decir, mostraremos que no existe alguna derivada direccional en $\overline{0}$ y concluiremos que f no es derivable en $\overline{0}$. Sea $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 1. Entonces, para $h \neq 0$, se tiene que

$$\frac{f(\overline{0}+h\overline{u}) - f(\overline{0})}{h} = \frac{\|h\overline{u}\| - \|\overline{0}\|}{h} = \frac{|h|}{h},$$

pero el límite, cuando h tiende a 0, de este cociente no existe, así que no existe la derivada direccional de f en $\overline{0}$ en la dirección de $\overline{u}$. ■

Este ejemplo exhibe una función continua en $\overline{0}$, pero no derivable en el mismo punto. Note además que es una generalización de la función "valor absoluto" que nos sirvió para ejemplificar lo mismo en Cálculo I.

Otra duda que nos podría surgir es ¿qué ocurre si existen todas las derivadas direccionales de f en $\overline{x}_0$ en la dirección de cualquier vector unitario? ¿f resulta derivable entonces?

Ejemplo 6 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada en términos de las coordenadas de la base canónica por la siguiente regla de correspondencia*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Muestre que existen todas las derivadas direccionales de f *en* $(0,0)$ *y que* f *no es derivable en* $(0,0)$.

Solución. Sea $\overline{u} = (u_1, u_2) \in S^1$. Supongamos primero que $u_2 = 0$, es decir, que $\overline{u} = (1,0)$. Entonces $f(\overline{0}+h\overline{u}) - f(\overline{0}) = f(h,0) - f(0,0) = 0$, por lo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{0}+h\overline{u}) - f(\overline{0})}{h} = 0,$$

es decir, $D_{\overline{u}}f(0,0)=0$. Supongamos ahora que $u_2\neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\overline{0}+h\overline{u})-f(\overline{0}) &= f(hu_1,hu_2)-f(0,0)\\ &= \frac{(hu_1)^2(hu_2)}{(hu_1)^4+(hu_2)^2}\\ &= \frac{h^3u_1^2u_2}{h^2(h^2u_1^4+u_2^2)}\\ &= \frac{hu_1^2u_2}{h^2u_1^4+u_2^2}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{0}+h\overline{u})-f(\overline{0})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u_1^2u_2}{h^2u_1^4+u_2^2}=\frac{u_1^2}{u_2}.$$

Es decir, $D_{\overline{u}}f(0,0)=\dfrac{u_1^2}{u_2}$. Así, concluimos que $D_{\overline{u}}f(0,0)$ existe para todo $\overline{u}\in S^1$.

Ahora, si demostramos que f no es continua en $(0,0)$, por la Proposición 4, podremos concluir que f no es derivable en $(0,0)$. Consideremos entonces la sucesión $\{\overline{a}_n\}=\left\{\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2}\right)\right\}$. Note que

$$\begin{aligned} f(\overline{a}_n) &= f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(\overline{a}_n)=\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto f no es continua en $(0,0)$, luego f no es derivable en $(0,0)$. ■

El ejemplo anterior muestra que la existencia de las derivadas direccionales de f en un punto no implica que f sea derivable en el mismo punto. ¿Podremos pedir alguna condición extra para que la existencia de las derivadas direccionales de f impliquen que f sea derivable? Intentemos deducir esa condición extra, para ello consideremos $U\subseteq\mathbb{R}^2$ (sí $\mathbb{R}^2$, sólo para simplificar la redacción), $\overline{x}_0=(x_0,y_0)\in U$ y $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Supongamos además que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Para ver que f es derivable en (x_0,y_0) debemos proponer una función lineal $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ y ver que

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}\frac{f(\overline{x})-[L(\overline{x}-\overline{x}_0)+f(\overline{x}_0)]}{\|\overline{x}-\overline{x}_0\|}=0,$$

pero a estas alturas ya sabemos que $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(x,y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y \end{aligned}$$

es la mejor candidata. Entonces

$$\begin{aligned} |f(\overline{x}) - [L(\overline{x}-\overline{x}_0)+f(\overline{x}_0)]\,| &= \left|f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - f(x_0,y_0)\right| \\ &\leq \left|f(x,y) - f(x_0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right| \\ &\quad + \left|f(x_0,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right|. \end{aligned}$$

Ahora, si además suponemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existen para todo (x,y) en una bola centrada en (x_0,y_0), entonces podemos aplicar el Teorema del Valor Medio en su versión para derivadas parciales. Así, existen $\overline{\xi}_x \in [(x,y),(x_0,y)]$ y $\overline{\xi}_y \in [(x_0,y_0),(x_0,y_0)]$ tales que

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{\xi}_x)(x-x_0)$$

y

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi}_y)(y-y_0).$$

De donde

$$\begin{aligned} |f(\overline{x}) - [L(\overline{x}-\overline{x}_0)+f(\overline{x}_0)]\,| &\leq \left|f(x,y) - f(x_0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right| \\ &\quad + \left|f(x_0,y) - f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right| \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{\xi}_x)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right| \\ &\quad + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi}_y)(y-y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right| \\ &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{\xi}_x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)\right| |(x-x_0)| \\ &\quad + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi}_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)\right| |(y-y_0)| \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{\xi}_x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)\right| \|\overline{x}-\overline{x}_0\| \\ &\quad + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi}_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)\right| \|\overline{x}-\overline{x}_0\|. \end{aligned}$$

Así, si $\overline{x} \neq \overline{x}_0$, entonces

$$0 \leq \frac{|f(\overline{x}) - [L(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]\,|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{\xi}_x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi}_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)\right|.$$

Finalmente, si ambas parciales son continuas en $\overline{x}_0$ tenemos que

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{\xi}_x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{\xi}_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)\right|\right) = 0,$$

pues $\overline{\xi}_x \longrightarrow \overline{x}_0$ y $\overline{\xi}_y \longrightarrow \overline{x}_0$ cuando $\overline{x} \longrightarrow \overline{x}_0$. Por lo tanto

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{|f(\overline{x}) - [L(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]\,|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = 0.$$

Recapitulando, si f es una función tal que existen todas las derivadas parciales en una bola abierta con centro en $\overline{x}_0$ y además son continuas en $\overline{x}_0$, entonces f es derivable en $\overline{x}_0$.

Proposición 7 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})$ existe para cada $\overline{x} \in B_r(\overline{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es continua en $\overline{x}_0$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces f es derivable en $\overline{x}_0$.*

Demostración. Supongamos que $\overline{x}_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n})$ y sea $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \dot{B}_r(\overline{x}_0)$. Definimos para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$

$$\overline{x}_i = (x_1, ..., x_i, x_{0,i+1}, ..., x_{0,n})$$

y $\overline{x}_n = \overline{x}$. Por el Ejercicio (4) de la Tarea 01, sabemos que $\overline{x}_i \in B_r(\overline{x}_0)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, además como $B_r(\overline{x}_0)$ es un conjunto convexo, tenemos que $[\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i] \subseteq B_r(\overline{x}_0)$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Ahora, note que, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, se tiene que

$$\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1} = (x_i - x_{0,i})\overline{e}_i,$$

por lo que estamos en condicicones de aplicar el Teorema del Valor Medio en su versión de derivadas parciales (Proposición 8 de la Clase 31). Así, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe $\overline{\xi}_i \in [\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i]$ tal que

$$f(\overline{x}_i) - f(\overline{x}_{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{\xi}_i\right)(x_i - x_{0,i}).$$

Note además que $\overline{\xi}_i \longrightarrow \overline{x}_0$ cuando $\overline{x} \longrightarrow \overline{x}_0$, por lo que

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{\xi}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0),$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$, pues todas las parciales son continuas en $\overline{x}_0$.
Ahora, definimos $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(\overline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0)\right) \cdot \overline{x}.$$

Veremos que L es la derivada de f en $\overline{x}_0$, para ello notemos que

$$f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) = (f(\overline{x}) - f(\overline{x}_{n-1})) + (f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2})) + \cdots + (f(\overline{x}_2) - f(\overline{x}_1)) + (f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)).$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(\overline{x}_i) - f(\overline{x}_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{\xi}_i\right)(x_i - x_{0,i}) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\xi}_1), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{\xi}_n)\right) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(\overline{x}) - [L(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]\,| &= |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - L(\overline{x} - \overline{x}_0)| \\ &= \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\xi}_1), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{\xi}_n)\right) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0)\right) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0)\right| \\ &= \left|\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\xi}_1), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{\xi}_n)\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0)\right)\right) \cdot (\overline{x} - \overline{x}_0)\right| \\ &\leq \left\|\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\xi}_1), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{\xi}_n)\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0)\right)\right)\right\| \|\overline{x} - \overline{x}_0\|. \end{aligned}$$

Así, para $\overline{x} \neq \overline{x}_0$ se tiene que

$$0 \leq \frac{|f(\overline{x}) - [L(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]\,|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} \leq \left\|\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{\xi}_1), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{\xi}_n)\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0)\right)\right)\right\|.$$

Al tomar el límite se sigue que

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{|f(\overline{x}) - [L(\overline{x} - \overline{x}_0) + f(\overline{x}_0)]\,|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = 0.$$

Lo anterior demuestra que f es derivable en $\overline{x}_0$ y que $L = Df(\overline{x}_0)$. ■

Ejemplo 8 *Consideremos la función del Ejemplo 6. Note que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*, tenemos que* f *es derivable en todo punto* $(x, y) \neq (0, 0)$.

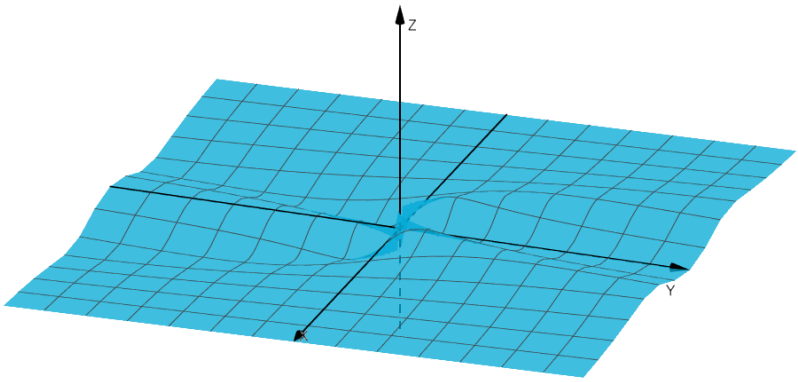

Figura 1: La función del Ejemplo 6 es derivable en todos lados excepto en el origen.