

Clase 36

Proposición 1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}_0) \subseteq U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existe para cada $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es continua en $\bar{x}_0$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces f es derivable en $\bar{x}_0$.

Observación 2 Sean $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función expresada en términos de las coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ determinadas por la base β . Si f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces $\nabla f(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \right)$.

Una consecuencia de esta observación es que podemos usar (cuando f es derivable en $\bar{x}_0$) el gradiente de f en $\bar{x}_0$ para representar a $Df(\bar{x}_0)$, es decir, $Df(\bar{x}_0)(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{x}$, para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

En esta sesión estudiaremos el comportamiento entre las operaciones que podemos llevar a cabo con funciones y la derivabilidad de estas.

Aritmética de derivadas

Proposición 3 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si f y g son derivables en $\bar{x}_0$, entonces:

(1) $f + g$ es derivable en $\bar{x}_0$ y

$$D(f + g)(\bar{x}_0) = Df(\bar{x}_0) + Dg(\bar{x}_0)$$

(2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es derivable en $\bar{x}_0$ y

$$D(\lambda f)(\bar{x}_0) = \lambda Df(\bar{x}_0)$$

(3) fg es derivable y

$$D(fg)(\bar{x}_0) = g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0)$$

(4) si $g(\bar{x}_0) \neq 0$, f/g es derivable en $\bar{x}_0$ y

$$D(f/g)(\bar{x}_0) = \frac{g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0)}{g^2(\bar{x}_0)}$$

Demostración. Como seguramente ya esperaban, solo haremos un inciso, el (3), y los demás se quedan de “tarea”.

Debemos demostrar que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{(fg)(\bar{x}) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0) + (fg)(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Para ello notemos que

$$\begin{aligned} (fg)(\bar{x}) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0) + (fg)(\bar{x}_0)] &= \\ &= (fg)(\bar{x}) - (fg)(\bar{x}_0) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0)] \\ &= (fg)(\bar{x}) - f(\bar{x})g(\bar{x}_0) + f(\bar{x})g(\bar{x}_0) - (fg)(\bar{x}_0) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0)] \\ &= f(\bar{x})[g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0)] + g(\bar{x}_0)[f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)] - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0)] \\ &= f(\bar{x})[g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0)] + g(\bar{x}_0)[f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)] - f(\bar{x})Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) \\ &\quad + f(\bar{x})Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0)] \\ &= f(\bar{x})[g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0) - Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)] + [f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)]Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) \\ &\quad + g(\bar{x}_0)[f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)]. \end{aligned}$$

Así, para $\bar{x} \neq \bar{x}_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(\bar{x}) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0) + (fg)(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} &= f(\bar{x}) \frac{g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0) - Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\ &\quad + [f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)] \frac{Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\ &\quad + g(\bar{x}_0) \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}. \end{aligned}$$

Ahora, como f y g son derivables en $\bar{x}_0$, entonces son continuas en $\bar{x}_0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) \frac{g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0) - Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} &= \left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) \right) \left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{g(\bar{x}) - g(\bar{x}_0) - Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) \\ &= f(\bar{x}_0)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}_0) \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} &= g(\bar{x}_0) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\ &= g(\bar{x}_0)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Solo resta demostrar que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} [f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)] \frac{Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Pero recuerde que $Dg(\bar{x}_0)$ es una función lineal, así que existe $M \geq 0$ tal que $|Dg(\bar{x}_0)(\bar{x})| \leq M\|\bar{x}\|$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Por lo que,

$$0 \leq \left| [f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)] \frac{Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right| \leq M [f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)]$$

y de aquí que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} [f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)] \frac{Dg(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{(fg)(\bar{x}) - [(g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0))(\bar{x} - \bar{x}_0) + (fg)(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0,$$

es decir, fg es derivable en $\bar{x}_0$ y $D(fg)(\bar{x}_0) = g(\bar{x}_0)Df(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)Dg(\bar{x}_0)$. ■

Continuaremos enunciando y demostrando las dos posibles reglas de la cadena que tenemos, pues es posible componer por la izquierda con funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y por la derecha con funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(U) \subseteq (a, b)$ y $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es derivable en $\bar{x}_0$ y g es derivable en $f(\bar{x}_0)$, entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}_0$ y

$$D(g \circ f)(\bar{x}_0) = g'(f(\bar{x}_0)) Df(\bar{x}_0)$$

Demostración. Debemos demostrar que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{(g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(\bar{x}_0) - g'(f(\bar{x}_0)) Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0$$

y para ello consideraremos un par de funciones auxiliares que construiremos a continuación. Sea $k : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$. Como f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces es continua en $\bar{x}_0$ y así

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} k(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = 0.$$

Ahora, note que si $\bar{x} \in U$ es tal que $k(\bar{x}) \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(\bar{x}_0) &= g(f(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0)) \\ &= \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} k(\bar{x}) \\ &= \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)) \\ &= \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)) \\ &= \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)) \\ &\quad + \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) \end{aligned}$$

y de aquí que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(\bar{x}_0) - g'(f(\bar{x}_0)) Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) &= \\
&= \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)) \\
&\quad + \left(\frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} - g'(f(\bar{x}_0)) \right) Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{(g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(\bar{x}_0) - g'(f(\bar{x}_0)) Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} &= \\
&= \frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} \left(\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) \\
&\quad + \left(\frac{g(f(\bar{x}_0) + k(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{k(\bar{x})} - g'(f(\bar{x}_0)) \right) \frac{Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando el límite cuando $\bar{x}$ tiende a $\bar{x}_0$, obtendríamos el resultado, pero el problema es que lo anterior es posible solo si $k(\bar{x}) \neq 0$. Consideremos entonces la función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{g(f(\bar{x})) - g(f(\bar{x}_0))}{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)} & \text{si } f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) \neq 0 \\ g'(f(\bar{x}_0)) & \text{si } f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = 0. \end{cases}$$

(Sí, φ es continua en $\bar{x}_0$, lo demostraron en la Ayudantía 27)

Note que para todo $\bar{x} \in U \setminus \{\bar{x}_0\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{(g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(\bar{x}_0) - g'(f(\bar{x}_0)) Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} &= \varphi(\bar{x}) \left(\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) \\
&\quad + (\varphi(\bar{x}) - g'(f(\bar{x}_0))) \frac{Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{(g \circ f)(\bar{x}) - (g \circ f)(\bar{x}_0) - g'(f(\bar{x}_0)) Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} &= \\
&= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \left[\varphi(\bar{x}) \left(\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) + (\varphi(\bar{x}) - g'(f(\bar{x}_0))) \frac{Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right] \\
&= \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \varphi(\bar{x}) \left(\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\varphi(\bar{x}) - g'(f(\bar{x}_0))) \frac{Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\
&= \varphi(\bar{x}_0)(0) + \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\varphi(\bar{x}) - g'(f(\bar{x}_0))) \frac{Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Note que en el último límite usamos que φ es continua en $\bar{x}_0$ y que existe $M \geq 0$ tal que $|Dg(\bar{x}_0)(\bar{x})| \leq M\|\bar{x}\|$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. ■

Demostraremos ahora la regla de la cadena para la composición por la derecha. Es necesario aclarar que ocuparemos el vector gradiente para representar a la derivada.

Proposición 5 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$ y $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a, b) \subseteq U$ y $\gamma(t_0) = \bar{x}_0$. Si f es derivable en $\bar{x}_0$ y γ es derivable en t_0 , entonces $f \circ \gamma$ es derivable en t_0 y

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

Demostración. En esta ocasión debemos demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0}$$

existe, pues $f \circ \gamma$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Como siempre, reescribiremos la expresión del límite. Sea $t \in (a, b)$ tal que $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} \left(\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \right) \\ &= \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} \left(\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \right) \\ &\quad + \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right). \end{aligned}$$

Note que al tomar el límite cuando t tiende a t_0 tendríamos el resultado pues $\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}$ es

acotada ya que $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} \right| = \|\gamma'(t_0)\|$; f es derivable en $\gamma(t_0)$ y γ derivable en t_0 .

Pero lo anterior vale solo si $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$. Así que definimos una función auxiliar $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0))}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} & \text{si } \gamma(t) \neq \gamma(t_0) \\ 0 & \text{si } \gamma(t) = \gamma(t_0) \end{cases}$$

Como f es derivable en $\gamma(t_0)$, γ continua en t_0 , pues es derivable en t_0 , tenemos que φ es continua en t_0 (pueden dar una demostración de este hecho imitando el argumento usado en la demostración de la Proposición 5 de la Clase 30). Ahora, para todo $t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$ se tiene que

$$\frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} = \varphi(t) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} + \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\varphi(t) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} + \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right) \\
&= 0 + \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \\
&= \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).
\end{aligned}$$

Es decir, $f \circ \gamma$ es derivable en t_0 y $(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$. ■