Última actualización: 1 de junio de 2022

Clase 37

La sesión anterior demostramos que la suma, el producto por escalar, el producto de dos funciones y el cociente de funciones (cuando tiene sentido) derivables en un punto $\overline{x}_0$ resultan derivables. También, en dos proposiciones, nos ocupamos de la composición, primero la composición por la izquierda:

Proposición 1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(U) \subseteq (a,b)$ y $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es derivable en $\overline{x}_0$ y g es derivable en $f(\overline{x}_0)$, entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}_0$ y*

$$D(g \circ f)(\overline{x}_0) = g'\left(f(\overline{x}_0)\right) Df(\overline{x}_0)$$

Y luego de la composición por la derecha:

Proposición 2 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in (a,b)$ y $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a,b) \subseteq U$ y $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$. Si f es derivable en $\overline{x}_0$ y γ es derivable en t_0, entonces $f \circ \gamma$ es derivable en t_0 y*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

Finalmente, para esta sesión, nos conviene recordar la siguiente definición:

Definición 3 *Sean $c \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos el conjunto de nivel c de f, denotado por $N_c(f)$, como*

$$N_c(f) = \{\overline{x} \in A \mid f(\overline{x}) = c\}$$

En esta clase obtendremos aplicaciones interesantes de la Proposición 2.

El gradiente y conjuntos de nivel

Comenzamos enunciando y demostrando un corolario de la Proposición 2.

Corolario 4 *Sean $c \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$. Si $\nabla f(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$ y $\overline{x}_0 \in N_c(f)$ entonces, para cualquier $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a,b) \subseteq N_c(f)$, γ derivable en $t_0 \in (a,b)$ y $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$, se tiene que*

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Demostración. Consideremos una función $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a,b) \subseteq N_c(f)$, γ derivable en $t_0 \in (a,b)$ y $\gamma(t_0) = \overline{x}_0$. Ahora, si definimos $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(t) = (f \circ \gamma)(t),$$

se tiene que $g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = c$, para cada $t \in (a,b)$, pues $\gamma(a,b) \subseteq N_c(f)$. Es decir, g es la función constante c.
Por otro lado, como f es derivable en $\overline{x}_0$ y γ es derivable en t_0, entonces $g = f \circ \gamma$ es derivable en t_0 y $g'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \gamma'(t_0)$. Por lo tanto

$$\nabla f(\overline{x}_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

■

Una forma de "enunciar" el corolario anterior es la siguiente:
Si $\overline{x}_0 \in N_c(f)$ y $\nabla f(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$, entonces $\nabla f(\overline{x}_0)$ es "normal" a $N_c(f)$ en $\overline{x}_0$. Lo anterior nos motiva a dar las siguientes definiciones.

Definición 5 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $\overline{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$ tal que $\nabla f(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$. Diremos que la recta determinada por la ecuación cartesiana*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)(y - y_0) = 0$$

es la recta tangente al conjunto de nivel $N_{f(\overline{x}_0)}(f)$ en el punto $\overline{x}_0$.

Definición 6 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\overline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$ tal que $\nabla f(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$. Diremos que el plano determinado por la ecuación cartesiana*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

es el plano tangente al conjunto de nivel $N_{f(\overline{x}_0)}(f)$ en el punto $\overline{x}_0$.

Por supuesto que las definiciones anteriores son útiles si sabemos expresar conjuntos más o menos arbitrarios como conjuntos de nivel de alguna función.

Ejemplo 7 *Considere la curva $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ definida como sigue*

$$\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)\}.$$

Halle las rectas tangentes a $\mathscr{C}$ en los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Solución. Lo primero que debemos hacer es interpretar a $\mathscr{C}$, como un conjunto de nivel de alguna función. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2).$$

De esta manera tenemos que $\mathscr{C} = N_0(f)$. Ahora, note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 2x)(2x - 2) - 8x$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 2x)(2y) - 8y.$$

Se sigue que ambas derivadas parciales existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por lo que f es derivable en cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ahora,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= \left(2(x^2 + y^2 - 2x)(2x - 2) - 8x, 2(x^2 + y^2 - 2x)(2y) - 8y \right). \end{aligned}$$

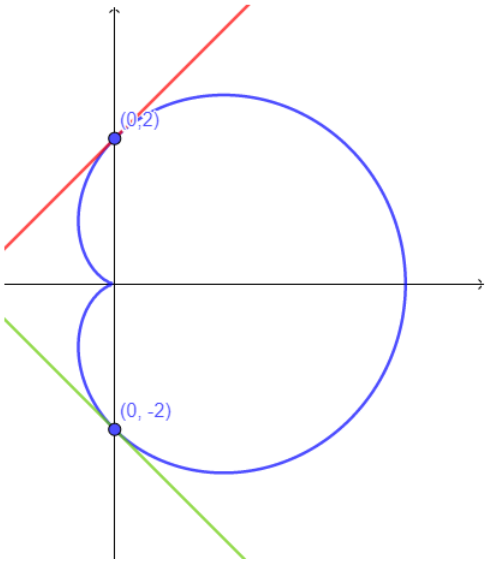

Figura 1: Las rectas tangentes a $N_0(f)$ en los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$.

De donde, $\nabla f(0,2) = (-16,16) \neq (0,0)$ y $\nabla f(0,-2) = (-16,-16) \neq (0,0)$.
Ahora, de acuerdo a la Definición 5, tenemos que la recta tangente al conjunto $N_0(f)$ en el punto $(0,2)$ tiene como ecuación cartesiana $-16(x-0)+16(y-2)=0$, o simplificando,

$$y = x + 2.$$

Y la recta tangente al conjunto $N_0(f)$ en el punto $(0,-2)$ tiene como ecuación cartesiana $-16(x-0)+(-16)(y-(-2))=0$, o simplificando,

$$y = -x - 2.$$

Si recuerdan estas rectas es porque ya las hemos calculado en el capítulo anterior, de hecho la curva de este ejercicio es la Cardioide. ■

Ejemplo 8 *Sean $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ y $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ la elipsoide con centro en el origen definida como sigue*

$$\mathscr{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Si $\overline{x}_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{E}$, halle el plano tangente a $\mathscr{E}$ en el punto $\overline{x}_0$.

Solución. Igual que en el ejemplo anterior, debemos interpretar a $\mathscr{E}$ como un conjunto de nivel de alguna función. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Se tiene que $\mathscr{E} = N_1(f)$.

Ahora, note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{a^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{b^2}$$

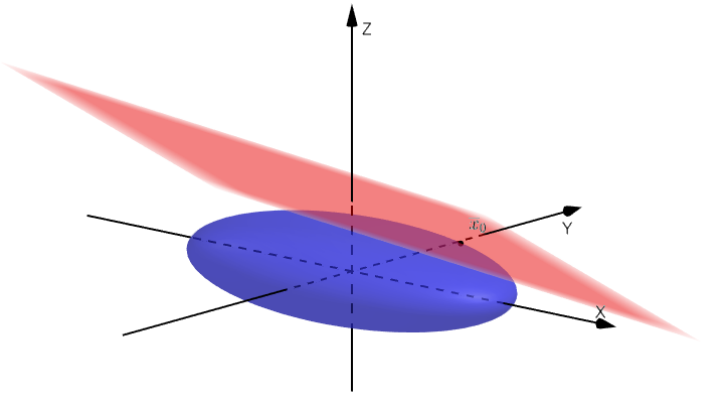

Figura 2: El plano tangente a $\mathscr{E}$ en el punto $\overline{x}_0$.

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{c^2}.$$

Se sigue que las tres derivadas parciales existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, por lo que f es derivable en cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Luego

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) \\ &= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).\end{aligned}$$

Ahora, como $\overline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{E}$ se tiene que $\nabla f(\overline{x}_0) \neq (0,0,0)$. De esta manera, tenemos que el plano tangente a $\mathscr{E}$ en el punto $\overline{x}_0$ tiene como ecuación cartesiana

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

o simplificando,

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1.$$

■

Note que, $\mathscr{C}$ no pueden ser visto como la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $\mathscr{E}$ no pueden ser visto como la gráfica de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Por ello, en los ejemplo anteriores se muestra la importancia de poder pensarlos como conjuntos de nivel de alguna función.