Clase 38

¿Derivadas de orden superior?

Recordemos de nuestros cursos de Cálculo I que la derivada tiene varias aplicaciones, por ejemplo, usábamos el “criterio de las caritas” para hallar máximos y/o mínimos locales de una función. Pero para ese entonces, al menos para aplicar el criterio mencionado, ya sabíamos, y usábamos, que existe el concepto de segunda derivada. De hecho, lo más probable es que para ese entonces ya conociéramos un concepto más general, el de la n -ésima derivada, es decir, las derivadas de orden superior.

Ahora, en Cálculo III, es natural preguntarse si existen las derivadas de orden superior para una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Analicemos entonces esta situación: Comenzaremos recordando que para una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $c \in (a, b)$ definíamos $f''(c)$ como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}.$$

Por supuesto lo anterior tenía sentido si existía $f'(c)$, y no solo eso, además debía existir $f'(x)$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$, con $\delta > 0$, pues si esto último no ocurría entonces no tenía sentido la expresión $f'(c+h)$.

En nuestro caso, si $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $\bar{x}_0$, ¿basta pedir que exista $Df(\bar{x})$ para cada $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$? Un momento, en el caso de Cálculo I, lo que necesitábamos era que la función $f' : (c - \delta, c + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ estuviera definida. Y en nuestro caso ¿qué necesitaríamos? ¿qué función debería estar definida en $B_r(\bar{x}_0)$? Lo que seguramente se nos ocurre es la función Df que a cada $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$ le asigna ¡la función lineal $Df(\bar{x})$! ¡Vaya *problema*! Lo que ocurre es que el codominio de la función Df es ¡el espacio de funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$! Y por supuesto este tipo de funciones no es el tipo que analizamos en este curso, pero eso no significa que no sea posible.

Entonces ¿todo está perdido? ¿no existen las derivadas de orden superior en Cálculo III? No, no todo está perdido, de hecho las derivadas direccionales se parecen MUCHO a las derivadas de Cálculo I, en el siguiente sentido:

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Si $D_{\bar{u}}f(\bar{x})$ existe para todo $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$, entonces la función $D_{\bar{u}}f : B_r(\bar{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$ le asigna el número real $D_{\bar{u}}f(\bar{x})$, está bien definida. Así, si $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector unitario, podríamos preguntarnos por la existencia de la derivada direccional de $D_{\bar{u}}f$ en la dirección de $\bar{v}$ en $\bar{x}_0$, que de existir denotaríamos por $D_{\bar{v}}(D_{\bar{u}}f)(\bar{x}_0)$ y estaría dada por

$$D_{\bar{v}}(D_{\bar{u}}f)(\bar{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_{\bar{u}}f(\bar{x}_0 + h\bar{v}) - D_{\bar{u}}f(\bar{x}_0)}{h}.$$

Podemos entonces hablar de derivadas direccionales de orden superior. Pero como ya hemos visto antes, las derivadas direccionales que han servido mucho son las derivadas parciales y es por ello que solo hablaremos de las derivadas parciales de orden superior.

Definición 1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}_0) \subseteq U$, $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas determinadas por β . Si

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existe para toda $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$, definimos la segunda derivada parcial de f con respecto a x_i y con respecto a x_j , denotada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0)$, como la derivada parcial de la función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ con respecto a x_j en $\bar{x}_0$, es decir, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + h\bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)}{h}.$$

Si $i = j$, la denotaremos por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{x}_0)$ y diremos que es la segunda derivada parcial de f respecto a x_i en $\bar{x}_0$.

Igual que antes, a la hora de la “talacha”, para obtener la segunda derivada parcial de f con respecto a x_i y con respecto a x_j basta derivar considerando a x_i como la única variable y después derivar la expresión que nos haya quedado considerando a x_j como la única variable.

Ejemplo 2 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 2xy^3 - \text{sen}(xy).$$

Halle todas las segundas parciales en el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Primero note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y^3 - y \cos(xy)$$

y que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 - x \cos(xy).$$

Ahora,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2 \text{sen}(xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6y^2 + xy \text{sen}(xy) - \cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y^2 + xy \text{sen}(xy) - \cos(xy)$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12xy + x^2 \text{sen}(xy).$$

■

Como seguramente ya notaron, la segunda derivada parcial de f con respecto a x y con respecto a y es igual a la segunda derivada parcial de f con respecto a y y con respecto a x y entonces podrían pensar que el orden no importa, lo cual es un error. En general lo anterior no ocurre, verán un ejemplo en la siguiente ayudantía, pero hay condiciones suficientes para que esto ocurra y las enunciamos en el siguiente teorema. Por cierto, el nombre del teorema es con el que se les conoce a las derivadas parciales que involucran dos variables en distinto orden.

Teorema 3 (de las parciales cruzadas) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}_0) \subseteq U$, $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas determinadas por β . Si para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})$

existen para cada $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ son continuas en $\bar{x}_0$, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0).$$

Demostración. Para la demostración de este teorema construiremos una función H cuyo dominio será $B_r(0, 0) = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2} < r\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y mostraremos, primero que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{H(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0),$$

después que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{H(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0)$$

para finalmente concluir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0).$$

Note que si $(h_1, h_2) \in B_r(0, 0)$, entonces

$$\|\bar{x}_0 - (\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j)\| = \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2} < r,$$

$$\|\bar{x}_0 - (\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i)\| = |h_1| < r$$

y

$$\|\bar{x}_0 - (\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j)\| = |h_2| < r.$$

Se sigue que $\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j$, $\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i$ y $\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j$ pertenecen a $B_r(\bar{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, la función $H : B_r(0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(h_1, h_2) = (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i)) - (f(\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0))$$

está bien definida.

Ahora, dado $(h_1, h_2) \in B_r(0, 0)$, definimos la función $g : (-\sqrt{r^2 - (h_2)^2}, \sqrt{r^2 - (h_2)^2}) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = f(\bar{x}_0 + x \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + x \bar{e}_i).$$

Por el Ejercicio 1 de la Sección 1 de la Tarea 06, tenemos que g es derivable en su dominio y

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + x \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + x \bar{e}_i).$$

Como $h_1 \in (-\sqrt{r^2 - (h_2)^2}, \sqrt{r^2 - (h_2)^2})$, suponiendo que $h_1 \neq 0$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a g en el intervalo $[0, h_1]$ o en el intervalo, $[h_1, 0]$, dependiendo el signo de h_1 . Tenemos que existe $\xi \in (0, h_1)$ (o en $(h_1, 0)$ dependiendo el signo de h_1) tal que

$$\frac{g(h_1) - g(0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i).$$

Pero note que $H(h_1, h_2) = (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i)) - (f(\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0)) = g(h_1) - g(0)$, así que

$$H(h_1, h_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i) \right) h_1.$$

Ahora, note que $[\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i, \bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j] \subseteq B_r(\bar{x}_0)$ y que $(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - (\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i) = h_2 \bar{e}_j$, por lo que estamos en las condiciones de aplicar el Teorema del Valor medio en su versión para derivadas parciales a la función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en el segmento $[\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i, \bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j]$. Es decir, si $h_2 \neq 0$, existe $\eta \in (0, h_2)$ o en $(h_2, 0)$, dependiendo el signo de h_2 , de tal manera que

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i) \right)}{h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + \eta \bar{e}_j).$$

Se sigue, si $h_1, h_2 \neq 0$, que

$$\frac{H(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + \eta \bar{e}_j).$$

Luego, como $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ cuando $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en $\bar{x}_0$, se tiene que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{H(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0 + \xi \bar{e}_i + \eta \bar{e}_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0).$$

Hasta aquí hemos terminado la primera parte de esta demostración. Para la segunda parte observemos que para cualesquiera $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{d} - \bar{a}) = (\bar{c} - \bar{d}) - (\bar{b} - \bar{a}).$$

Así, en nuestro caso tenemos que

$$\begin{aligned} & (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i)) - (f(\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0)) = \\ & = (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j)) - (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i) - f(\bar{x}_0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función H se puede escribir como

$$H(h_1, h_2) = (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + h_2 \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + h_2 \bar{e}_j)) - (f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i) - f(\bar{x}_0)).$$

Luego, definimos la función $k : \left(-\sqrt{r^2 - (h_1)^2}, \sqrt{r^2 - (h_1)^2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$k(x) = f(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + x \bar{e}_j) - f(\bar{x}_0 + x \bar{e}_j).$$

Igual que con g , tenemos que existe $\xi' \in \left(-\sqrt{r^2 - (h_1)^2}, \sqrt{r^2 - (h_1)^2} \right)$ tal que

$$H(h_1, h_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + h_1 \bar{e}_i + \xi' \bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \xi' \bar{e}_j) \right) h_2.$$

Y como $[\bar{x}_0 + \xi'\bar{e}_j, \bar{x}_0 + h_1\bar{e}_i + \xi'\bar{e}_j] \subseteq B_r(\bar{x}_0)$ y $(\bar{x}_0 + h_1\bar{e}_i + \xi'\bar{e}_j) - (\bar{x}_0 + \xi'\bar{e}_j) = h_1\bar{e}_i$, entonces aplicando el Teorema del Valor medio en su versión para derivadas parciales a la función $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en el segmento $[\bar{x}_0 + \xi'\bar{e}_j, \bar{x}_0 + h_1\bar{e}_i + \xi'\bar{e}_j]$, tenemos que existe $\eta' \in (0, h_1)$ (o en $(h_1, 0)$ dependiendo el signo de h_1) tal que

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + h_1\bar{e}_i + \xi'\bar{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + \xi'\bar{e}_j)\right)}{h_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0 + \eta'\bar{e}_i + \xi'\bar{e}_j).$$

Se sigue que, si $h_1, h_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{H(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0 + \eta'\bar{e}_i + \xi'\bar{e}_j).$$

Luego, como $(\xi', \eta') \rightarrow (0, 0)$ cuando $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ es continua en $\bar{x}_0$, se tiene que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{H(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0 + \xi'\bar{e}_i + \eta'\bar{e}_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0).$$

Con lo cual terminamos la demostración. ■

Igual que en Cálculo I, aquí también podemos definir derivadas de orden mayor a 2.

Definición 4 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}_0) \subseteq U$, $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas determinadas por β . Si $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} \in \{1, 2, \dots, n\}$ son tales que $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x})$ existe para toda $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$, definimos la $k + 1$ derivada parcial de f con respecto a $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}$, en $\bar{x}_0$, denotada por $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x}_0)$, como la derivada parcial de la función $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ con respecto a $x_{i_{k+1}}$ en $\bar{x}_0$, es decir, como

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x}_0 + h\bar{e}_{i_{k+1}}) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x}_0)}{h}.$$

Si $i_1 = i_2 = \dots = i_k = i_{k+1} = i$, la denotaremos por $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_i^{k+1}}(\bar{x}_0)$ y diremos que es la $k + 1$ derivada parcial de f respecto a x_i en $\bar{x}_0$.

Notación: Si existen $i_1, i_2, \dots, i_m$ índices consecutivos iguales, entonces sustituimos la expresión $\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_1}$ por la expresión ∂x_i^m , donde x_i es la variable que se repite m veces. Por ejemplo, en vez de escribir $\frac{\partial^5 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}_0)$ escribiremos $\frac{\partial^5 f}{\partial x_3 \partial x_1^3 \partial x_2}(\bar{x}_0)$

Definición 5 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Diremos que f es una función de clase C^k en U , denotado por $f \in C^k(U)$, si existen todas las derivadas parciales de orden k de f en cada punto de U y además estas derivadas parciales son continuas.

Con el lenguaje de la definición anterior podemos enunciar de otra manera algunas proposiciones demostradas anteriormente.

Proposición 6 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f \in C^1(U)$, entonces f es derivable en cada $\bar{x} \in U$.

Proposición 7 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f \in C^2(U)$, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}).$$

para todo $\bar{x} \in U$.