Clase 39

Polinomios de Taylor

En esta ocasión estudiaremos los polinomios de Taylor y para motivar la definición de estos trabajaremos, por el momento, con funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en $\bar{x}_0$, entonces

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Dado lo anterior, notamos que “cerca” de $\bar{x}_0$ la función $P(\bar{x}) = Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)$ es una buena aproximación a $f(\bar{x})$. Ahora, usando el vector gradiente de f en $\bar{x}_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} P(\bar{x}) &= Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0) \\ &= \nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)(y - y_0) + f(\bar{x}_0). \end{aligned}$$

Se sigue que P es una función polinomial de grado a lo más 1 (podría suceder que ambas parciales sean cero en $\bar{x}_0$) en las variables x, y y tal que $P(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, mas aún, como la derivada es única, entonces P es la única función polinomial con estas características. Es decir, si f es derivable en $\bar{x}_0$, por ejemplo si $f \in C^1(B_r(\bar{x}_0))$, entonces $P(\bar{x}) = Df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0)$ es la única función polinomial de grado a lo más 1 en las variables x, y tal que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - P(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0. \quad (1)$$

Resulta natural preguntarse si existe una función polinomial de grado a lo más 2 que cumpla algo similar. Primero notemos que una función polinomial de grado a lo más 2 en las variables x, y es de la forma

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F.$$

Luego, como queremos que $P(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, debe suceder que

$$P(x, y) = A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(x - x_0)(y - y_0) + D(x - x_0) + E(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Ahora, como $(x - x_0)^2$, $(y - y_0)^2$, $(x - x_0)(y - y_0) \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2$, entonces

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{A(x - x_0)^2}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{B(y - y_0)^2}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{C(x - x_0)(y - y_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

Así, para que P cumpla la condición (1) bastaría que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [D(x - x_0) + E(y - y_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0,$$

lo cual ocurre si f es derivable en $\bar{x}_0$, y en este caso $D = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)$ y $E = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)$.

Concluimos que si f es derivable en $\bar{x}_0$ y

$$P(x, y) = A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)(y - y_0) + f(\bar{x}_0),$$

con A , B y C números reales, entonces P satisface la condición (1). De hecho, hemos obtenido una infinidad de funciones polinomiales que satisfacen la condición (1), pero de todas estas una debería aproximarse a f “mejor” ¿no?

Bueno, notemos que si $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < 1$, entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$. De aquí que, si $\bar{x}$ tiende a $\bar{x}_0$, entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2$ tiende a cero “más rápido” que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|$. Por lo tanto, si pedimos que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - P(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2} = 0, \quad (2)$$

estaremos pidiendo una condición más fuerte que la condición (1). Supongamos entonces que P cumple la condición (2), es decir, que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - [A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)(y - y_0) + f(\bar{x}_0)]}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2} = 0.$$

Entonces, haciendo $\bar{x} = (x, y) = (x_0 + h, y_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - [Ah^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)h + f(\bar{x}_0)]}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)h + f(\bar{x}_0)}{h^2} - A \right]. \end{aligned}$$

Note que el cociente del límite anterior es un cociente de dos funciones que solo dependen de h , es decir, un par de funciones de variable real. Así, si pedimos que $f \in C^2(B_r(\bar{x}_0))$, entonces podemos aplicar la regla del L'Hôpital, por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)h + f(\bar{x}_0)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).$$

De manera analoga, haciendo $\bar{x} = (x, y) = (x_0, y_0 + h)$, tenemos que

$$B = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Finalmente, haciendo $\bar{x} = (x, y) = (x_0 + h, y_0 + h)$, tenemos que

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0) h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}_0) h^2 + Ch^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0) h + f(x_0, y_0) \right]}{h^2}.$$

Y una vez más, usando la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0) h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}_0) h^2 + Ch^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0) h + f(x_0, y_0) \right]}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0 + h) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + h) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0) h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}_0) h + 2Ch + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0) \right]}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + h, y_0 + h) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + h, y_0 + h) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + h, y_0 + h) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + h, y_0 + h) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}_0) + 2C \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0) - 2C \right). \end{aligned}$$

Por lo que

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0) \right).$$

Así, si P es un polinomio de grado a lo más dos, que satisface la condición (2), entonces

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0)(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}_0)(y - y_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0) \right) (x - x_0)(y - y_0) \right] \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)(y - y_0) + f(\bar{x}_0). \end{aligned}$$

Es posible que con lo que hemos desarrollado hasta ahorita ya hayamos notado que bajo ciertas condiciones se puede construir una función polinomial que cumpla una condición similar a las condiciones (1) y (2).

Definición 1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}_0) \subseteq U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $N \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^N(B_r(\bar{x}_0))$, definimos el polinomio de Taylor de grado N de la función f en $\bar{x}_0$, denotado por $P_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x})$, como

$$\begin{aligned} P_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x}) &= f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)(x_i - x_{0,i}) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(\bar{x}_0)(x_{i_1} - x_{0,i_1})(x_{i_2} - x_{0,i_2}) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{N!} \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_N} \cdots \partial x_{i_1}}(\bar{x}_0)(x_{i_1} - x_{0,i_1}) \cdots (x_{i_N} - x_{0,i_N}), \end{aligned}$$

en donde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\bar{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$. Y para cada $\bar{x} \in U$ el residuo de orden N de f en $\bar{x}_0$, denotado por $R_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x})$, como

$$R_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x}).$$

Ejemplo 2 Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2) + \ln(1 + y^2).$$

Calcule el polinomio de Taylor de grado 2 de f en el punto $(0, 0)$ y el residuo de orden 2 de f en $(0, 0)$

Solución. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1+y^2},$$

así que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{1+y^2} - \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2.$$

Y de aquí que

$$\begin{aligned} P_{2,f,\bar{0}}(\bar{x}) &= f(\bar{0}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0})(y-0) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{0})(x-0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{0})(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)(y-0)(x-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{0})(y-0)^2 \right) \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$R_{2,f,\bar{x}_0}(\bar{x}) = \ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) - (x^2 + y^2).$$

■

Ya que hemos definido el polinomio de Taylor resta ver que condición similar a (1) y (2) cumple, lo cual haremos en el siguiente teorema:

Teorema 3 (de Taylor) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$, $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}_0) \subseteq U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $N \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^{N+1}(B_r(\bar{x}_0))$, entonces:

1. Si $\bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$ y $\bar{u} = \bar{x} - \bar{x}_0$, entonces existe $\bar{\xi} \in [\bar{x}_0, \bar{x}]$ tal que

$$R_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x}) = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_N, i_{N+1}=1} \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x_{i_{N+1}} \partial x_{i_N} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{\xi}) u_{i_1} \dots u_{i_N} u_{i_{N+1}}$$

donde $u_j = x_j - x_{0,j}$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

- 2.

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - P_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^N} = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \frac{R_{N,f,\bar{x}_0}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^N} = 0.$$

3. $P_{N,f,\bar{x}_0}$ es el único polinomio de grado menor o igual a N que satisface la condición del inciso anterior.

Cuya demostración realizaremos en la siguiente sesión.