Última actualización: 14 de junio de 2022

Clase 41

Antes de comenzar a desarrollar resultados acerca de máximos y mínimos de una función recordemos lo siguiente: Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A. Si B es un conjunto no vacío, cerrado y acotado, entonces existen $\overline{x}, \overline{z} \in B$ tales que $f(\overline{x}) \leq f(\overline{y}) \leq f(\overline{z})$ para todo $\overline{y} \in B$, es decir, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre B.

Se tiene que $B = int(B) \cup Fr(B)$, pues es un conjunto cerrado. Así, los puntos donde f alcanzaza su valor máximo y su valor mínimo sobre B tienen solo dos opciones, o pretenecen al conjunto abierto $int(B)$ o pertenecen al conjunto cerrado $Fr(B)$, pues estos son ajenos. Entonces estudiaremos estas dos posibilidades comenzando con los conjuntos abiertos, pero antes formalicemos los conceptos de valor máximo y valor mínimo de una función.

Máximos y Mínimos

Definición 1 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$, $\overline{x}_0 \in B$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que:*

(1) f alcanza un valor máximo, respectivamente mínimo, en $\overline{x}_0$ sobre B si $f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_0)$, respectivamente $f(\overline{x_0}) \leq f(\overline{x})$, para todo $\overline{x} \in B$.

(2) f alcanza un valor máximo local, respectivamente mínimo local, en $\overline{x}_0$ sobre B si existe $r > 0$ tal que $f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_0)$, respectivamente $f(\overline{x_0}) \leq f(\overline{x})$, para todo $\overline{x} \in B \cap B_r(\overline{x}_0)$.

Observación 2 *Si f alcanza un valor máximo, respectivamente mínimo, en $\overline{x}_0$ sobre B, entonces f alcanza un valor máximo local, respectivamente mínimo local, en $\overline{x}_0$ sobre B, pero no al revés, es decir, si f alcanza un valor máximo local, respectivamente mínimo local, en $\overline{x}_0$ sobre B no necesariamente f alcanza un valor máximo, respectivamente mínimo, en $\overline{x}_0$ sobre B.*

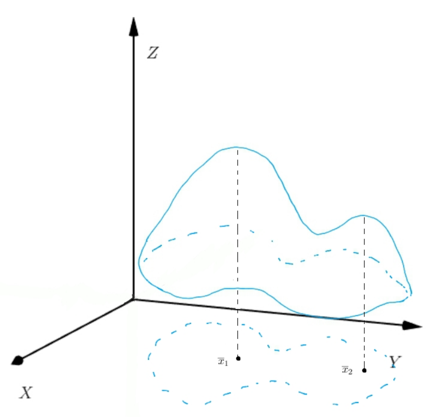

Figura 1: En $\overline{x}_1$ hay un máximo y en $\overline{x}_2$ hay un máximo local que no es máximo.

Ahora, enunciamos y demostramos un resultado que seguramente ya se esperaban.

Proposición 3 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$. Si f alcanza un valor máximo local, respectivamente mínimo local, en $\overline{x}_0$ sobre U, entonces $Df(\overline{x}_0)$ es la función constante cero.*

Demostración. Recuerde que $Df(\overline{x}_0)$ puede ser representada por el vector gradiente $\nabla f(\overline{x}_0)$ y que

$$\nabla f(\overline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0) \right).$$

Así que basta demostrar que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Supongamos entonces que f alcanza un valor máximo local en $\overline{x}_0$ sobre U. Así, existe $r > 0$ tal que $f(\overline{x}) \leq f(\overline{x}_0)$ para todo $\overline{x}_0 \in B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$ (note que aquí podemos suponer que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$, pues U es un conjunto abierto). Luego, si $|h| < r$ tenemos que $f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_i) \leq f(\overline{x}_0)$ y de aquí que

$$f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_i) - f(\overline{x}_0) \leq 0.$$

Ahora, si $0 < h < r$, entonces

$$\frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_i) - f(\overline{x}_0)}{h} \leq 0$$

y se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_i) - f(\overline{x}_0)}{h} \leq 0.$$

Por otro lado, si $-r < h < 0$, entonces

$$\frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_i) - f(\overline{x}_0)}{h} \geq 0$$

y se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{e}_i) - f(\overline{x}_0)}{h} \geq 0.$$

Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = 0$. ■

Igual que en cálculo I, el regreso no vale, es decir, si la derivada de f en $\overline{x}_0$ es la función constante cero, no necesariamente f alcanza un valor máximo, respectivamente mínimo, en $\overline{x}_0$ sobre B. Esto lo mostramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 *Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Halle los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde $Df(x, y) \equiv 0$.

Solución. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2y,$$

de donde $Df(x, y) \equiv 0$ solamente cuando $(x, y) = (0, 0)$. Ahora, note que

$$f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0, 0) < x^2 = f(x, 0).$$

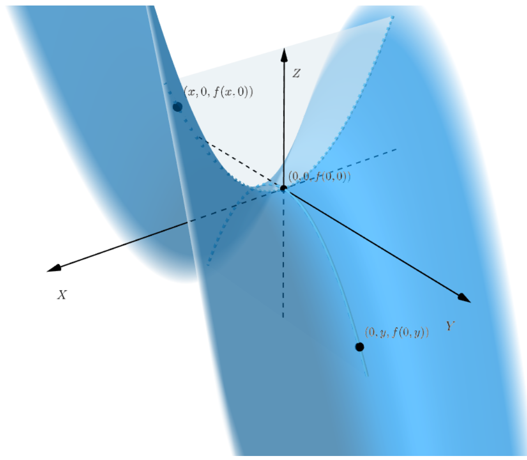

Figura 2: Aunque $Df(0,0) \equiv 0$, en $(0,0)$ f no alcanza ni un valor máximo ni un valor mínimo.

Así, para cualquier $r > 0$ se tiene que, si $0 < |x|, |y| < r$, entonces $(x,0), (0,y) \in B_r(0,0)$ y

$$f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0) < x^2 = f(x,0).$$

Es decir, f no alcanza ni un valor máximo ni un valor mínimo en $(0,0)$ (vea figura 2). ■

Los puntos donde la derivada es la función constante cero reciben un nombre, el mismo que en cálculo I.

Definición 5 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\overline{x}_0$. Si la derivada de f en $\overline{x}_0$ es la función constante cero ($Df(\overline{x}_0) \equiv 0$), diremos que $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f.*

Como acabamos de ver, un punto crítico puede no ser ni un máximo local ni un mínimo local y justo por el aspecto geométrico "alrededor" del punto $(0,0)$ en el ejemplo anterior a estos puntos les llamamos punto silla. Es importante notar que no todos los puntos silla "geométricamente"se vean así (vea figura 3).

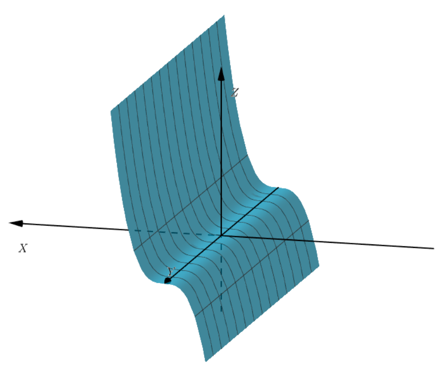

Figura 3: Todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3$ son puntos silla.

Ahora nos dedicaremos a desarrollar un criterio para clasificar los puntos críticos de una función y, en principio, solo utilizaremos el Teorema de Taylor.

Consideremos $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$, $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f \in C^2(U)$, para $\overline{h} = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\overline{h}\| < r$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_0 + \overline{h}) &= P_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}) + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}) \\ &= f(\overline{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}). \end{aligned}$$

en donde

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} = 0.$$

Ahora, si $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f, entonces

$$f(\overline{x}_0 + \overline{h}) = f(\overline{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}).$$

Analicemos la expresión

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j. \tag{1}$$

Note que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j = [h_1 \cdots h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

La ventaja de escribir (1) usando matrices es que podemos relacionarla con las formas cuadráticas (vea Addendum 03). Llamaremos a la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{x}_0) \end{bmatrix}$$

la matriz hessiana de f en $\overline{x}_0$ y la denotaremos por $Hf(\overline{x}_0)$, es decir,

$$Hf(\overline{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{x}_0). \end{bmatrix}$$

La matriz hessiana de f en $\overline{x}_0$ tiene asociada una forma cuadrática que llamaremos **la hessiana de f en $\overline{x}_0$**, la denotaremos por $Hf_{\overline{x}_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y que está dada por

$$\begin{aligned} Hf_{\overline{x}_0}(\overline{x}) &= Hf_{\overline{x}_0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= [x_1 \ \cdots \ x_n] Hf(\overline{x}_0) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dada la relación entre la matriz hessiana de f en $\overline{x}_0$ y la hessiana de f en $\overline{x}_0$, podemos ocupar el siguiente lema (vea Addendum 03).

Lema 6 *Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cudrática semipositiva (resp. seminegativa) y no degenerada asociada a una matriz A, entonces existe $M > 0$ (resp. $m < 0$) tal que*

$$Q(\overline{h}) \geq M\|\overline{h}\|^2 \qquad (\textit{resp. } Q(\overline{h}) \leq m\|\overline{h}\|^2)$$

para toda $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$

Este lema tiene como consecuencia una versión del "criterio de las caritas" para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

Proposición 7 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tales que $f \in C^2(U)$ y $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f. Se tiene que:*

(a) Si la hessiana de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática semipositiva y no degenerada, entonces f tiene un mínimo local en $\overline{x}_0$.

(b) Si la hessiana de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática seminegativa y no degenerada, entonces f tiene un máximo local en $\overline{x}_0$.

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$. Como $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f, si $\overline{h} = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\|\overline{h}\| < r$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_0 + \overline{h}) &= f(\overline{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x}_0) h_i h_j + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}) \\ &= f(\overline{x}_0) + \frac{1}{2} Hf_{\overline{x}_0}(\overline{h}) + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h}), \end{aligned}$$

donde, aplicando el Teorema de Taylor (con N=1, recuerde que lo enunciamos con $N+1$) y la continuidad de las segundas derivadas parciales,

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0 + \overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} = 0. \tag{2}$$

Supongamos que estamos en las hipótesis del inciso (b), es decir, que $Hf_{\overline{x}_0}$ es seminegativa y no degenerada. Entonces, por el Lema 6 existe $m < 0$ tal que

$$Hf_{\overline{x}_0}(\overline{h}) \leq m\|\overline{h}\|^2$$

para todo $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$. Ahora, por (2), existe $\delta > 0$ tal que si $\|\overline{h}\| < \delta$, entonces

$$\frac{\left|R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0+\overline{h})\right|}{\|\overline{h}\|^2} < \frac{-m}{2}$$

y de aquí que

$$\frac{R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0+\overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} + \frac{m}{2} < 0.$$

Así, si $r_0 = \text{mín}\{r,\delta\}$ y $0 < \|\overline{h}\| < r_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{f(\overline{x}_0+\overline{h}) - f(\overline{x}_0)}{\|\overline{h}\|^2} &= \frac{\frac{1}{2}Hf_{\overline{x}_0}(\overline{h}) + R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0+\overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Hf_{\overline{x}_0}(\overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} + \frac{R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0+\overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} \\
&\leq \frac{m}{2} + \frac{R_{2,f,\overline{x}_0}(\overline{x}_0+\overline{h})}{\|\overline{h}\|^2} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(\overline{x}_0+\overline{h}) < f(\overline{x}_0)$ para todo $\overline{h}$ tal que $\|\overline{h}\| < r_0$, es decir, f tiene un máximo local en $\overline{x}_0$. La demostración de (a) es análoga. ■

Por supuesto que uno puede preguntarse si el recíproco de esta proposición vale, pero, igual que en Cálculo I, no se cumple. Es decir, si f tiene un mínimo local o un máximo local en un punto no necesariamente se cumple que la hessiana de f en dicho punto es semipositiva o seminegativa, es más puede ser muy degenerada. Veamoslo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8 *Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$

Muestre que f tiene un mínimo en $(0,0)$, pero la hessiana de f en $(0,0)$ es la función constante cero.

Solución. Note que $0 = 0^4 + 0^4 \leq x^4 + y^4$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Así, f tiene un mínimo en $(0,0)$. Ahora, note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3.$$

Con lo que, claramente, $(0,0)$ es un punto crítico de f. Luego,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2.$$

Por lo tanto

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Y así, la hessiana de f en $(0,0)$ es la función constante cero. ■

Si bien es cierto que el ejemplo anterior muestra que el recíproco de la Proposición 7 en general no vale, podemos averiguar si tenemos un regreso parcial como en Cálculo I:
Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$ un punto crítico. Si $f''(x_0)$ existe y f tiene un mínimo local (resp. máximo local) en x_0, entonces $f''(x_0)\geq 0$ (resp. $f''(x_0)\leq 0$).

Proposición 9 *Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0\in U$ y $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tales que $f\in C^2(U)$ y $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f. Se tiene que:*

(a) Si f tiene un mínimo local en $\overline{x}_0$, entonces la hessiana de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática semipositiva.

(b) Si f tiene un máximo local en $\overline{x}_0$, entonces la hessiana de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática seminegativa.

Demostración. Demostraremos el inciso (a), así que sea $r>0$ tal que $B_r(\overline{x}_0)\subseteq U$ y $f(\overline{x}_0)\leq f(\overline{x})$ para todo $\overline{x}\in B_r(\overline{x}_0)$. Ahora, consideremos $\overline{u}=(u_1,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|\overline{u}\|=1$ y definimos $\gamma:(-r,r)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t)=\overline{x}_0+t\overline{u}$ y $g:(-r,r)\longrightarrow\mathbb{R}$ como $g(t)=(f\circ\gamma)(t)$. Como g es composición de funciones derivables, entonces es derivable y por una de las versiones de la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))u_i. \end{aligned}$$

Ahora, note que para cada $i\in\{1,...,n\}$, la función $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\circ\gamma\right):(-r,r)\longrightarrow\mathbb{R}$ es derivable en su dominio pues $f\in C^2(U)$, así que, aplicando la regla de la cadena y sumando, tenemos que

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\gamma(t))u_j\right)u_i\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\gamma(t))u_iu_j. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} g''(0) &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\gamma(0))u_iu_j\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\overline{x}_0)u_iu_j\\ &= Hf_{\overline{x}_0}(\overline{u}). \end{aligned}$$

Como f tiene un mínimo local en $\overline{x}_0$, entonces g tiene un mínimo local en $t=0$, por lo que $g''(0)\geq 0$. Así que

$$Hf_{\overline{x}_0}(\overline{u}) = g''(0) \geq 0.$$

Finalmente, si $\overline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$, entonces el vector $\dfrac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$ es de norma 1 y

$$\frac{1}{\|\overline{x}\|^2} Hf_{\overline{x}_0}(\overline{x}) = Hf_{\overline{x_0}}\left(\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}\right) \geq 0,$$

de donde $Hf_{\overline{x}_0}(\overline{x}) \geq 0$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, es decir, $Hf_{\overline{x}_0}$ es una forma cuadrática semipositiva. ■

Veamos ahora un ejemplo donde sí podamos aplicar la Proposición 7.

Ejemplo 10 *Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}.$$

Demuestre que f solo tiene un punto crítico y determine si este es un mínimo local, máximo local o ninguno de los dos.

Solución. Primero calculemos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3e^y - 3x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3xe^y - 3e^{3y}.$$

Ahora, para que $Df(x, y) \equiv 0$, es necesario que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ simultáneamente, es decir, que se cumplan

$$3e^y - 3x^2 = 0 \tag{3}$$

$$3xe^y - 3e^{3y} = 0 \tag{4}$$

Pero note que (2) se satisface si y sólo si $e^y = x^2$; mientras que (3) se satisface si y sólo si $x = e^{2y}$. Y como se deben satisfacer simultáneamente, entonces debe suceder que $e^{4y} = e^y$ o de manera equivalente que $e^{3y} = 1$, de donde obtenemos que $y = 0$ y luego que $x = 1$. Por lo tanto el único punto crítico de f es el punto de coordenadas $(1, 0)$.
Ahora determinaremos si el punto $(1, 0)$ es un máximo local o mínimo local de f o ninguno de los dos. Para ello notemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3e^y, \qquad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3e^y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 3xe^y - 9e^y,$$

de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) = 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = -6.$$

Así, la matriz hessiana de f en $(1, 0)$ es la matriz

$$Hf(1, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

y la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en $(1,0)$ está dada, para cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\begin{aligned} Hf_{(1,0)}(x,y) &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= -6x^2 + 6xy - 6y^2. \end{aligned}$$

Pero note que

$$Hf_{(1,0)}(x,y) = -6x^2 + 6xy - 6y^2 = -6\left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right],$$

y de aquí que $Hf_{(1,0)}$ es no degenerada y seminegativa. Por lo tanto f tiene un máximo local en $(1,0)$. ■

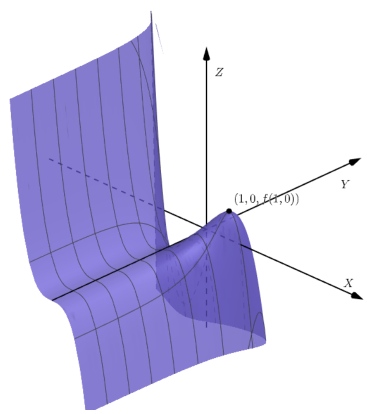

Figura 4: La función $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ tiene un valor máximo local en el punto $(1,0)$.