Última actualización: 15 de junio de 2022

Clase 42

Proposición 1 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tales que $f \in C^2(U)$ y $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f. Se tiene que:*

(a) Si la hessiana de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática semipositiva y no degenerada, entonces f tiene un mínimo local en $\overline{x}_0$.

(b) Si la hessiana de f en $\overline{x}_0$ es una forma cuadrática seminegativa y no degenerada, entonces f tiene un máximo local en $\overline{x}_0$.

Máximos y Mínimos (2da. Parte)

Proposición 2 *Sea $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática que tiene asociada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

es decir, la forma cuadrática dada por

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2. \end{aligned}$$

Entonces, Q es semipositiva (resp. seminegativa) y no degenerada si y sólo si $a > 0$ (resp. $a < 0$) y $det(A) = ac - b^2 > 0$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que Q es seminegativa y no degenerada, esto es, que $Q(\overline{x}) \leq 0$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $Q(\overline{x}) = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$. Así, $a = Q(1,0) < 0$, es decir, $a < 0$. Ahora, note que

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a}\right)y^2. \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{ac-b^2}{a} = Q(b/a,-1) < 0.$$

Y como $a<0$ concluimos que $det(A) = ac - b^2 > 0$, lo que demuestra la primera implicación.

Supongamos ahora que $a<0$ y que $det(A) = ac - b^2 > 0$. Como

$$Q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(\frac{ac-b^2}{a}\right)y^2$$

entonces Q es seminegativa. Luego, si (x,y) es tal que $Q(x,y)=0$, entonces debe ocurrir que

$$a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{ac-b^2}{a}\right)y^2 = 0$$

De la segunda ecuación obtenemos que $y=0$ y sustituyendo en la primera obtenemos que $x=0$. Así, Q es no degenerada. ■

Como consecuencia de esta proposición tenemos un corolario de la Proposición 1.

Corolario 3 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tales que $f \in C^2(U)$ y $\overline{x}_0$ es un punto crítico de f. Se tiene que:*

(a) Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0) > 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)\right)^2 > 0,$$

entonces f tiene un mínimo local en $\overline{x}_0$.

(b) Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0) < 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}_0)\right)^2 > 0,$$

entonces f tiene un máximo local en $\overline{x}_0$.

Veamos ahora un par de ejemplos donde utilizaremos el corolario anterior y donde seguiremos un proceso similar al que utilizábamos para hallar máximos y mínimos de una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable en (a,b) y continua en $[a,b]$, es decir, hallábamos los puntos críticos de f en (a,b), determinábamos si se trataban de máximos o mínimos locales o ninguno de los dos y finalmente los comparábamos con los valores en los extremos de $[a,b]$.

Ejemplo 4 *Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$$

y el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 2\}$. Halle los valores máximo y mínimo de f sobre B.

Solución. Primero note que la función f es continua sobre todo $\mathbb{R}^2$, en particular sobre el conjunto cerrado y acotado (compacto) B, así que f sí alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre B. Para hallar dichos valores procederemos de la siguiente manera, hallaremos primero los puntos críticos de f en el abierto $int(B)$, veremos si son máximos o mínimos locales o ninguno de estos,

después hallaremos los valores máximo y mínimo de f sobre el conjunto cerrado $Fr(B)$ y compararemos con los obtenidos en $int(B)$.
Para hallar los puntos críticos de f en $int(B)$ debemos hallar los puntos $(x,y) \in int(B)$ tales que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Pero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+1) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

entonces debemos hallar los puntos $(x,y) \in int(B)$ tales que

$$2(x+1) = 0 \qquad \text{y} \qquad 2y = 0.$$

Lo que ocurre únicamente si $x = -1$ y $y = 0$, es decir, el único punto crítico de f en todo $\mathbb{R}^2$ es el punto $(-1,0)$ que de hecho pertenece al interior de B, pues $\|(-1,0)\| = 1 \leq 2$. Ahora, note que

$$f(-1,0) = 0 \leq (x+1)^2 + y^2 = f(x,y)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo que f tiene un mínimo en $(-1,0)$ sobre todo $\mathbb{R}^2$. Así, f alcanza su valor mínimo sobre B en el punto $(-1,0)$ y dicho valor es 0.
Ahora, observe que

$$Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 2\}$$

y que la función $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),$$

es tal que $\gamma([0,2\pi]) = Fr(B)$, es decir, γ es una parametrización de $Fr(B)$. Luego, si definimos la función $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$ y localizamos sus valores máximo y mínimo en su dominio obtendremos los valores máximo y mínimo de f sobre $Fr(B)$.
Se tiene que

$$g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = f(2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)) = (2\cos(t)+1)^2 + 4\,\mathrm{sen}^2(t) = 4\cos(t) + 5.$$

De donde, $g'(t) = 0$ si y sólo si $-4\,\mathrm{sen}(t) = 0$, lo cual ocurre solo si $t = \pi$. Como $g(\pi) = 1 \leq 4\cos(t) + 5 = g(t)$ para toda $t \in [0, 2\pi]$, se tiene que g alcanza su valor mínimo en $t = \pi$ y dicho valor es 1.
Ahora, dado que $g(0) = 9$ y $g(2\pi) = 9$, entonces tenemos que g alcanza su valor máximo en $t = 0$ y $t = 2\pi$. Por lo tanto tenemos que f alcanza su valor mínimo sobre $Fr(B)$ en el punto $\gamma(\pi) = (-2,0)$, dicho valor es $f(-2,0) = 1$, y su valor máximo sobre $Fr(B)$ en el punto $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (2,0)$ y dicho valor es $f(2,0) = 9$.
Finalmente, comparando los valores obtenidos en $Int(B)$ y en $Fr(B)$, concluimos que f alcanza su valor mínimo sobre B en el punto $(-1,0)$, dicho valor es 0, y que f alcanza su valor máximo sobre B en el punto $(2,0)$ y que dicho valor es 9 (vea figura 1). ■

Como seguramente ya lo notaron, en el ejemplo anterior no fue necesario utilizar el Corolario 3, entonces veamos un ejemplo donde sí utilicemos dicho corolario.

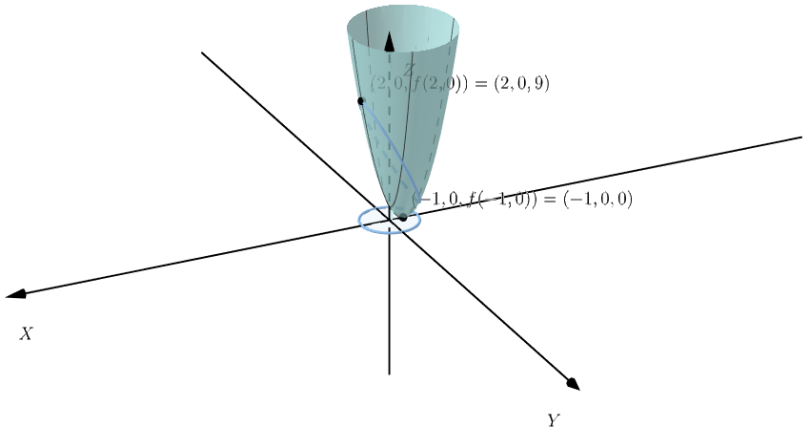

Figura 1: Los valores máximo y mínimo de $f(x,y) = (x+1)^2+y^2$ sobre B son 9 y 0 respectivamente.

Ejemplo 5 *Considere la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2(x-y)$$

y el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 2\}$. *Halle los valores máximo y mínimo de* f *sobre* B.

Solución. Es claro que f alcanza tanto su valor máximo como su valor mínimo sobre B pues f es continua y B es compacto. Igual que en el ejemplo anterior, determinemos primero los puntos críticos de f sobre $int(B)$, para ello note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2,$$

de donde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si y sólo si

$$2x - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad 2y + 2 = 0,$$

lo que ocurre si y sólo si $(x,y) = (1,-1)$. Ahora,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2,$$

de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,-1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = 2,$$

Así,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1-1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,-1)\right)^2 = 4 > 0,$$

entonces, por el inciso (a) del Corolario 3 , f tiene un mínimo local en $(1,-1)$ y dicho valor es $f(1,-1)=-2$.
Ahora, igual que en el ejemplo anterior, la función $\gamma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t)=(2\cos(t),2\,\mathrm{sen}(t))$$

parametriza $Fr(B)$. Así que al hallar el máximo y el mínimo de la función $g:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$, dada por $g(t)=(f\circ\gamma)(t)$, obtendremos el máximo y el mínimo de f sobre $Fr(B)$.
Se tiene que

$$g(t)=(f\circ\gamma)(t)=f(\gamma(t))=f(2\cos(t),2\,\mathrm{sen}(t))=4-4(\cos(t)-\mathrm{sen}(t)).$$

De donde, $g'(t)=0$ si y sólo si $4(\cos(t)+\mathrm{sen}(t))=0$, lo cual ocurre solo si $t=3\pi/4$ o $t=7\pi/4$. Luego $g''(t)=4(\cos(t)-\mathrm{sen}(t))$ y de aquí que $g''(3\pi/4)<0$ y $g''(7\pi/4)>0$. con lo que g tiene un máximo local en $t=3\pi/4$ y un mínimo local en $t=7\pi/4$ y los valores son $g(3\pi/4)=4+4\sqrt{2}$ y $g(7\pi/4)=4-4\sqrt{2}$, respectivamente. Y como $g(0)=g(2\pi)=0$, tenemos que el valor máximo de g es $4+4\sqrt{2}$, alcanzado en $t=3\pi/4$, y el valor mínimo es $4-4\sqrt{2}$, alcanzado en $t=7\pi/4$. Así, el valor máximo de f en $Fr(B)$ es $4+4\sqrt{2}$, alcanzado en $\gamma(3\pi/4)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, y el valor mínimo de f sobre $Fr(B)$ es $4-4\sqrt{2}$, alcanzado en $\gamma(7\pi/4)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
Finalmente, comparando los valores obtenidos en $Int(B)$ y en $Fr(B)$, concluimos que f alcanza su valor mínimo sobre B en el punto $(1,-1)$, dicho valor es -2, y que f alcanza su valor máximo sobre B en el punto $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ y que dicho valor es $4+4\sqrt{2}$. (vea figura 2). ■

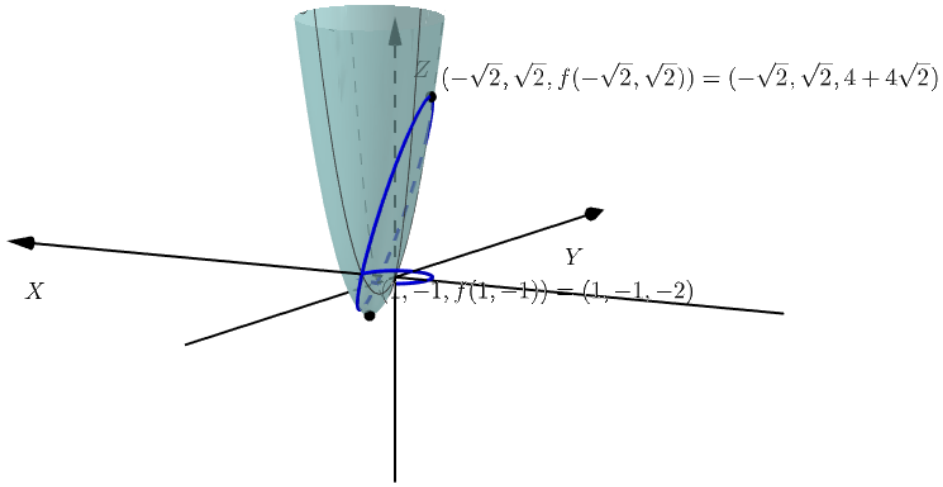

Figura 2: Los valores máximo y mínimo de $f(x,y)=x^2+y^2-2(x-y)$ sobre B son $4+4\sqrt{2}$ y -2 respectivamente.

Note que en los ejemplos anteriores solo pudimos utilizar la herramienta nueva en el conjunto abierto $int(B)$, el siguiente paso es desarrollar herramientas para hallar máximos y mínimos sobre conjuntos "flacos" justo como $Fr(B)$.

En los ejemplos anteriores, para hallar los máximos y mínimos de f sobre $Fr(B)$, usamos fuertemente el hecho de que $Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 2\}$ se puede parametrizar. Ahora usaremos otra propiedad de $Fr(B)$ para deducir otra forma hallar los máximos y mínimos de f sobre $Fr(B)$, esta propiedad es que $Fr(B)$ se puede pensar como un conjunto de nivel de alguna función. Es decir, si $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $g(x,y) = x^2 + y^2$, entonces $N_4(g) = Fr(B)$. Así, nuestro problema sería hallar los máximos y mínimos de f sobre $N_4(g)$. Aprovecharemos, que para la función f y el conjunto B del Ejemplo 4 ya lo sabemos. Vimos que f alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre $Fr(B)$ en los puntos $(2,0)$ y $(-2,0)$ respectivamente y que dichos valores son 1 y 9 respectivamente. Consideremos ahora un par de conjuntos de nivel de f, pero no cualquiera, justo los conjuntos del nivel donde f alcanzo sus valores extremos, a saber $N_1(f)$ y $N_9(f)$. Observe que estos conjuntos de nivel son tangentes como se muestra en la figura 3.

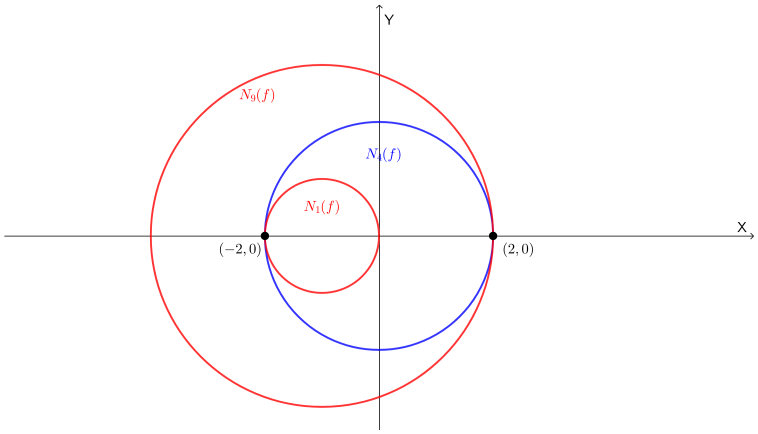

Figura 3: Los conjuntos $N_9(f)$ y $N_1(f)$ son tangentes a $N_4(g)$ en $(2,0)$ y $(-2,0)$, respectivamente.

Ahora, si recordamos que el vector gradiente de una función en un punto $\overline{x}_0$ es normal al conjunto de nivel que contiene dicho punto, según nuestra observación anterior (los conjuntos de nivel son tangentes) los vectores $\nabla f(-2,0)$ y $\nabla g(-2,0)$ deben ser paralelos al igual que los vectores $\nabla f(2,0)$ y $\nabla g(2,0)$. Veamos si efectivamente esto ocurre.
Se tiene que

$$\nabla f(x,y) = (2(x+1), 2y) \qquad \text{y} \qquad \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, así que

$$\nabla f(2,0) = (6,0) \qquad \text{y} \qquad \nabla g(2,0) = (4,0)$$

y

$$\nabla f(-2,0) = (-2,0) \qquad \text{y} \qquad \nabla g(-2,0) = (-4,0).$$

Por lo tanto

$$\nabla f(2,0) = \frac{3}{2}\nabla g(2,0) \qquad \text{y} \qquad \nabla f(-2,0) = \frac{1}{2}\nabla g(-2,0).$$

Ah, entonces si queremos hallar los valores máximo y mínimo de una función f sobre un conjunto de nivel de otra función, digamos $N_c(g)$ ¿es suficiente con encontrar los puntos $\overline{x} \in N_c(g)$ en los cuales $\nabla f(\overline{x})$ y $\nabla g(\overline{x})$ son paralelos? Veamos si esto es cierto con un problema geométrico bien conocido: Dado un plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ que tiene como ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

con A, B, C no todos cero, y un punto $\overline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Halle la distancia del punto $\overline{x}_0$ al plano P.

Dicha distancia es la mínima distancia entre el punto $\overline{x}_0$ y los puntos del plano P y como el punto en el plano que minimiza la distancia a $\overline{x}_0$ es el mismo que minimiza la distancia al cuadrado, entonces trabajaremos con la función $f(x, y, z) = d^2(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. Así que debemos hallar el valor mínimo de la función f sobre el conjunto $N_0(g)$ donde g está dada por $g(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Se tiene que

$$\nabla f(x, y, z) = (2(x - x_0), 2(y - y_0), 2(z - z_0)) \qquad \text{y} \qquad \nabla g(x, y, z) = (A, B, C).$$

Y como debemos hallar los puntos $(x, y, z) \in N_c(g)$ tales que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2(x - x_0) &= \lambda A \\ 2(y - y_0) &= \lambda B \\ 2(z - z_0) &= \lambda C \\ Ax + By + Cz + D &= 0. \end{aligned}$$

De las primeras tres ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\lambda A + x_0 \\ y &= \frac{1}{2}\lambda B + y_0 \\ z &= \frac{1}{2}\lambda C + z_0 \end{aligned}$$

y sustituyendo esto en la cuarta ecuación tenemos que

$$A\left(\frac{1}{2}\lambda A + x_0\right) + B\left(\frac{1}{2}\lambda B + y_0\right) + C\left(\frac{1}{2}\lambda C + z_0\right) + D = 0.$$

De donde

$$\lambda = -\frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{1}$$

Y sustituyendo este valor en los despejes de x, y y z, tenemos que el punto $\overline{x}_P$ que tiene como coordenadas

$$\left(x_0 - A\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, y_0 - B\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, z_0 - C\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$$

es el único punto del plano P que satisface

$$\nabla f(\overline{x}_P) = \lambda \nabla g(\overline{x}_P)$$

donde λ está dada por (1). Ahora, note que

$$\begin{aligned} d(\overline{x}_0, P) &= \sqrt{f(\overline{x}_P)} \\ &= \|\overline{x}_P - \overline{x}_0\| \\ &= \left\| -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C) \right\| \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Lo que estábamos esperando.