Última actualización: 24 de marzo de 2022

Cálculo diferencial e integral III
Tarea 02

Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
Fecha de entrega: Sábado 26 de marzo de 2022.

(1). Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Pruebe que el conjunto

$$\begin{aligned} A &= (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\, i = 1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

es conexo.

(2). Sea $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ no vacío. Demuestre que:

a) A no puede ser abierto y cerrado al mismo tiempo.
b) $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$.
c) Si $\overline{x} \in A$ y $\overline{y} \in \mathbb{R}^n \setminus A$, entonces $[\overline{x}, \overline{y}] \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$.

(3). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado con $A \neq \varnothing$. Pruebe que A es disconexo si y sólo si existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que B y C son cerrados, ajenos, no vacíos y $A = B \cup C$.

(4). Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conjuntos no vacíos y conexos. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe su respuesta.

a) Los conjuntos A y B son conexos.
b) Si A y B son cerrados, entonces A y B son conexos.
c) Si A y B son abiertos, entonces A y B son conexos.

(5). Determine si la intersección de los siguientes conjuntos es conexa. Justifique su respuesta.

a) $B_1 = B_{r_1}(\overline{0})$ y $B_2 = B_{r_2}(\overline{x})$, donde $r_1, r_2 > 0$ y $\overline{x} = (0, \ldots, 0, r_1 + r_2, 0, \ldots, 0)$, donde $r_1 + r_2$ aparece en la i-ésima entrada (con $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo).
b) $A = \left\{(x, y) \,\middle|\, y = \dfrac{1}{n}x,\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ y $B = B_1(0, 0)$.

(6). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) A es conexo
b) Para cualesquiera a, $b \in A$ con $a < b$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$, se cumple que $c \in A$.
c) A es un intervalo (es decir, es un conjunto de algunas de las formas: $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, o $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$).

(7). Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que si A y B están separados, entonces $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

(8). Sean A, B, $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que si B y C están separados, entonces $A \cap B$ y $A \cap C$ están separados.

(9). Sean A, B, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\varnothing \neq A \subseteq B \cup C$. Pruebe que si A es conexo y B y C están separados, entonces $A \cap B = \varnothing$ o $A \cap C = \varnothing$.

(10). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Pruebe que si para cualesquiera dos puntos $\overline{x}$, $\overline{y} \in A$ existen $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k \in A$ tales que $[\overline{x}, \overline{x}_1] \cup [\overline{x}_1, \overline{x}_2] \cup \cdots \cup [\overline{x}_k, \overline{y}] \subseteq A$, entonces A es conexo.