Última actualización: 18 de abril de 2022

Cálculo diferencial e integral III
Tarea 03

Instrucciones:

(1). Resuelva **a lo más** 3 ejercicios de cada sección.

(2). **Resuelva exactamente** 8 **ejercicios.**

Fecha de entrega: Viernes 22 de abril de 2022.

Sección 1

(1). Halle el dominio de las funciones determinadas por las siguientes reglas de correspondencia.

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-xy}$.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1-xy}$.

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-1}$.

d) $f(x,y) = \displaystyle\int_1^{1-\frac{1}{xy}} \frac{dt}{t}$.

(2). Halle todos los conjuntos de nivel $N_c(f)$ de las siguientes funciones. Dé, además, una descrición geométrica de los mismos.

a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$.

(3). Determine el conjunto $f(A)$ cuando:

a) La función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), x^2)$; con $A = \mathbb{R}^2$.

b) La función $f(x,y) = (e^x \operatorname{sen}(y), e^x\cos(y))$; con A la recta de la forma $x = c$, o A la recta de la forma $y = d$, para cualesquiera $c, d \in \mathbb{R}$.

c) La función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x+y, x-y, x^2-y^2)$ y $A = \mathbb{R}^2$.

(4). Decimos que $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una *función lineal* si $L(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha L(\overline{x}) + \beta L(\overline{y})$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

a) $L(\overline{0}) = \hat{0}$.

b) Si $\hat{c} \in \mathbb{R}^m$, la función $\hat{c}\cdot L$ es una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

c) La función constante cero (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) es la única función constante que es lineal.

d) Existe $M \geq 0$ tal que $\|L(\overline{x})\| \leq M\|\overline{x}\|$ para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

e) Si $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función lineal, entonces la gráfica de L es un plano que pasa por el origen.

f) Cualquier plano cuya ecuación sea de la forma $Ax + By + Cz = 0$, con $C \neq 0$, coincide con la gráfica de alguna función lineal $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (en las variables x y y).

g) Si $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función lineal, con L distinta de la función constante cero, entonces cualquier conjunto de nivel de L es un plano.

Sección 2

(5). Determine si las siguientes sucesiones convergen o no. En caso de que la sucesión sea convergente, halle el límite correspondiente. Justifique su respuesta.

a) $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(k - \sqrt{k+1}\sqrt{k+2}\ ,\ \prod_{i=1}^{k} \sqrt[k]{\frac{k}{k+i}}\right)\right\}$.

b) $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left((k^2+1)^{\frac{1}{8}} - (k+1)^{\frac{1}{4}}, \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k}, k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\}$.

c) $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(\frac{1}{(k+16)^3} + \frac{1}{(k+17)^3} + \cdots + \frac{1}{(2k+30)^3}\ ,\ \left(1+\frac{b}{k}\right)^k\right)\right\}$.

d) $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\ ,\ \sum_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{i}\right)^i\ ,\ \int_1^{1+\frac{1}{k}} \frac{dt}{t}\right)\right\}$.

(6). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

a) $\overline{x}_0 \in A'$ sí y sólo si existe una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ en $A \smallsetminus \{\overline{x}_0\}$ tal que $\{\overline{x}_k\}$ converge a $\overline{x}_0$.

b) Si $\overline{x}_0$ es un punto aislado de A y $\{\overline{x}_k\}$ es una sucesión en A que converge a $\overline{x}_0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x}_k = \overline{x}_0$ para toda $k \geq N$.

(7). Sean $\{\overline{a}_k\}$, $\{\overline{b}_k\}$ y $\{\overline{c}_k\}$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$ tales que $\{\overline{a}_k\}$ y $\{\overline{c}_k\}$ convergen a $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$, y también

$$\|\overline{a}_k\| \leq \|\overline{b}_k\| \leq \|\overline{c}_k\|$$

para toda $k \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que la sucesión $\{\|\overline{b}_k\|\}$ también converge y encuentre el límite.

b) ¿Se cumple que la sucesión $\{\overline{b}_k\}$ converge a $\overline{a}$? Justifique su respuesta.

(8). Sea $\{\overline{x}_k\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Pruebe usando la definición que:

a) La sucesión $\{\overline{x}_k\}$ es acotada.

b) Si el rango de $\{\overline{x}_k\}$ es finito, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x}_k = \overline{x}_0$ para toda $k \geq N$.

c) Si $\{\overline{x}_{k_l}\}$ es una subsucesión de $\{\overline{x}_k\}$ que converge a $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{\overline{x}_k\}$ converge a $\overline{x}_0$.

Sección 3

(9). Determine si las siguientes funciones tienen límite en el punto que se indica o no. En caso de que exista el límite, calcule su valor. Justifique su respuesta.

a) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en $(0,0,0)$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$ en $(0,0)$.

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^5}{x^2+(y-1)^2}$ en $(0,1)$.

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ en $(0,0)$.

(10). Sean $f = (f_1,\ldots,f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\overline{x}_0 \in A'$. La función f tiene límite en $\overline{x}_0$ y su límite es $\bar{l} = (l_1,\ldots,l_m) \in \mathbb{R}^m$ sí y sólo si la función f_i tiene límite en $\overline{x}_0$ y su límite es l_i (para cada $i = 1,\ldots,n$).

(11). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$. Definimos $B = \{\overline{x} - \overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, \overline{x} \in A\}$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como $g(\overline{h}) = f(\overline{x}_0 + \overline{h})$ para cada $\overline{h} \in B$. Pruebe que:

a) $\overline{x}_0 \in A'$ sí y sólo si $\overline{0} \in B'$.

b) $\bar{l} = \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})$ sí y sólo si $\bar{l} = \lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} g(\overline{h})$.

(12). Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal. Pruebe que si

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\|L(\overline{h})\|}{\|\overline{h}\|} = 0,$$

entonces L es la función constante cero.

(13). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overline{x}_0 \in A'$ y $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l}$. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe sus respuestas.

a) $\bar{l} \in (f(A))'$.

b) Si $D \subset \mathbb{R}^m$ es tal que $\bar{l} \in D'$ y $(f^{-1}(D))' \neq \varnothing$, entonces $\overline{x}_0 \in (f^{-1}(D))'$.

c) Si las afirmaciones anteriores no son ciertas, dé condiciones adicionales sobre la función f para que sí lo sean.