Cálculo diferencial e integral III
Tarea 4

Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
Fecha de entrega: Lunes 9 de mayo de 2022.

1. Pruebe que las siguientes funciones son continuas en su dominio:
   a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\|$.
   b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   c) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal.
2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $\overline{x}_0 \in A$ tal que $f(\overline{x}_0) \neq \overline{0}$. Pruebe que
   a) Existe $\delta > 0$ tal que $f(\overline{x}) \neq \overline{0}$ para toda $\overline{x} \in B_\delta(\overline{x}_0) \cap A$.
   b) Existen $c > 0$ y $\delta' > 0$ tales que $\|f(\overline{x})\| \geq c$ para toda $\overline{x} \in B_{\delta'}(\overline{x}_0) \cap A$.
3. *a*) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pruebe que f es continua en A sí y sólo si para todo conjunto cerrado $C \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un subconjunto cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(C) = D \cap A$.
   b) Pruebe que:
      1) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leq x^2 + y\right\}$ es un conjunto cerrado.
      2) $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = \dfrac{1}{x}\right\}$ es un conjunto cerrado.
4. Determine si $f(A)$ es conexo. Justifique su respuesta.
   a) $f : A = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida por
   $$f(x, y) = (a\cos(x)\operatorname{sen}(y), b\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), c\cos(y)),$$
   con a, b, $c > 0$.
   b) $A = \left\{(x, y) \,\middle|\, y = \dfrac{1}{n}x,\ n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\right\} \cap B_1(0, 0) \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$ está definida por
   $$f(\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|\overline{x}\|} & \text{si } \overline{x} \neq (0, 0), \\ 1 & \text{si } \overline{x} = (0, 0). \end{cases}$$
   c) $A = B_{r_1}(\overline{x}_0) \cup B_{r_2}(\overline{y}_0)$, con $r_2 > r_1 > 0$, $\overline{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{y}_0 = (x_0, y_0 + 2r_1 + 2r_2)$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x, y) = x$.
5. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, con A conexo y tal que $f(\overline{x}) \neq 0$ para toda $\overline{x} \in A$. Pruebe que $f(\overline{x}) < 0$ para toda $\overline{x} \in A$ o $f(\overline{x}) > 0$ para toda $\overline{x} \in A$.
6. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, y $B \subset A$ conexo, cerrado y acotado. Pruebe que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(B) = [a, b]$.
7. Determine si los siguientes conjuntos son compactos. Justifique su respuesta.

a) $A = f(\mathbb{R}^2)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida por

$$f(x,y) = (a\cos(x)\operatorname{sen}(y), b\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), c\cos(y)),$$

con a, b, $c > 0$.

b) $B = \left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

c) $C = \left\{\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2\pi n}{n_0}\right), \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{n_0}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0,0)\}$.

8. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y acotado, y $\overline{y} \in A^{\mathsf{C}}$. Pruebe que existe $\overline{x}_0 \in A$ tal que $\|\overline{y} - \overline{x}_0\| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|$ para toda $\overline{x} \in A$. Muestre que la afirmación anterior no es válida si no suponemos que A es cerrado. ¿Ésta afirmación sigue siendo cierta si únicamente suponemos que A es cerrado? Pruebe su respuesta.

9. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A, con A cerrado y acotado. Pruebe que existen $\overline{x}_0, \overline{x}_1 \in A$ tales que $\|f(\overline{x}_0)\| \leq \|f(\overline{x})\| \leq \|f(\overline{x}_1)\|$ para toda $\overline{x} \in A$.

10. Sea $\alpha > 0$. Decimos que una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es α-Lipschitz si existe $C \geq 0$ tal que para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in A$ se cumple que

$$\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| \leq C\|\overline{x} - \overline{y}\|^{\alpha}.$$

a) Pruebe que toda función α-Lipschitz es uniformemente continua.

b) Considere una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con D convexo. Demuestre que f es uniformemente continua en D sí y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que

$$\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| \leq K\|\overline{x} - \overline{y}\| + \varepsilon$$

para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in D$.