Cálculo diferencial e integral III
Tarea 5

Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
Fecha de entrega: Martes 24 de mayo de 2022.

1. Encuentre la longitud de una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$. Deje su resultado expresado como una integral.

2. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una función derivable. Demuestre que $\|\gamma(t)\|$ es constante si y sólo si $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ para toda $t \in I$.

3. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ derivable y $r(t) = \|\gamma(t)\|$. Si $r(t_0)$ es un máximo o mínimo local de r, pruebe que $\gamma(t_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$. En el caso de que se alcance un mínimo en $r(t_0)$, ¿qué interpretación geométrica daría del hecho anterior?

4. ¿Recuerda los cohetes llamados "abejitas"? Suponga que al encender una "abejita", ésta sigue una trayectoria descrita por la función $\gamma : [0, 10] \to \mathbb{R}^3$ dada por la siguiente regla de correspondencia
$$\gamma(t) = (10\cos(10\pi t), 10\,\mathrm{sen}(10\pi t), 100t),$$
donde t mide el tiempo en segundos y cada coordenada de $\gamma(t)$ se mide en centímetros. Calcule:
   a) la velocidad instantánea de la "abejita" a los 5 segundos;
   b) la rapidez de la "abejita" un segundo después de haber despegado:
   c) ¿Qué rapidez debería tener la "abejita" para que a los 3 segundos halla alcanzado una altura de 2.5 metros?

5. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $\gamma'(t) \neq (0, 0)$. Demuestre que existen $\xi \in (a, b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que
$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b - a} = \lambda\gamma'(\xi).$$

6. Considere la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, t, t) & \text{si } t < 0, \\ (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$
¿Es $\gamma(\mathbb{R})$ una curva? Si las respuesta afirmativa, ¿es una curva suave?

7. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^m$.
   a) Muestre que $\ell(\gamma) = b - a$.
   b) Exhiba un ejemplo en el cual la *longitud* de C no coincida con la longitud determinada por γ (es decir, con $\ell(\gamma)$).

8. Halle, en los valores que sea posible, el vector tangente unitario, el vector normal unitario, la curvatura, el vector binormal, el plano osculador y la circunferencia osculatriz, a la curva parametrizada por $\gamma : [0, 4r] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = r\left(2 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{4r}\right) + \frac{t}{8r^2}\sqrt{16r^2 - t^2}\,,\ \frac{\pi}{r}\,,\ 2 - \frac{t^2}{8r^2}\right),$$

donde $r > 0$ es una constante.

9. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^m$. Si $T(s)$ es el vector tangente unitario y $\theta(s,h)$ representa el ángulo formado por los vectores $T(s)$ y $T(s+h)$, pruebe que

$$k(s) = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\theta(s,h)}{h}\right|.$$

10. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\tau(s) = 0$ para toda $s \in I$, entonces C está contenida en un plano.