Cálculo diferencial e integral III
Tarea 6

Instrucciones:

1. Resuelva **al menos 1** ejercicio de cada sección.
2. Cada ejercicio vale 1 punto y deben acumular 10 puntos.
3. La calificación que se obtenga en esta tarea podrá sustituir la calificación de cualquiera de las tareas anteriores.
4. **Fecha de entrega:** Sábado 18 de junio de 2022.

Sección 1

1. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$ y $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\overline{u}\| = 1$. Si $r > 0$ cumple que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$, definimos $g : (-r, r) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(x) = f(\overline{x}_0 + x\overline{u})$. Suponga que para cada $\overline{x} \in B_r(\overline{x}_0)$ existe $D_{\overline{u}} f(\overline{x})$. Demuestre que g es derivable para toda $x \in (-r, r)$ y además
$$g'(x) = D_{\overline{u}} f(\overline{x}_0 + x\overline{u}).$$

2. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones en todos los puntos donde sea posible.
   a) $f(x, y) = x^2 y + \pi \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   b) $g(x, y, z) = \dfrac{yz + 2}{x^3} - \ln(x^2 y z^3)$.
   c) En este inciso suponga que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua.
$$h(x, y) = \int_0^{\left[e^x \int_0^{y^2} g(s)\ ds\right]} g(t)\ dt.$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = f(y, x)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y suponga que para toda $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Pruebe que para cualquier $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ y se cumple que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(b, a)$.

4. Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq U$. Suponga que existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x})$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x})$ para cada $\overline{x} \in B_r(\overline{x}_0)$ y que las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son acotadas en $B_r(\overline{x}_0)$. Pruebe que f es continua en $\overline{x}_0$. *Sugerencia: Utilice el Teorema del Valor Medio para derivadas parciales.*

5. Use el concepto de derivada para dar una estimación de las siguientes cantidades.
   a) $(0.99)^3 + (2.01)^3 - 6(0.99)(2.01)$.

b) $(1.04)^{2.02}$.

6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que f es constante sobre el conjunto abierto U. Pruebe que f es derivable para toda $\overline{x} \in U$ y que además $Df(\overline{x})$ es la función lineal constante 0 ($Df(\overline{x}) \equiv 0$) para toda $\overline{x} \in U$. ¿Se cumple lo recíproco? ¿Es necesaria otra hipótesis sobre el conjunto U? Pruebe sus respuestas.

Sección 2

7. El capitán Nemo está en problemas cerca de la parte soleada de Mercurio. La temperatura del casco de su nave, cuando se localiza en el punto (x, y, z) está dada por la función $T(x, y, z) = e^{-x-2y^2-3z^2}$, donde x, y y z están medidas en metros. Si la nave está en el punto $(1, 1, 1)$:

   a) ¿en qué dirección debe mover la nave para que la temperatura decrezca más rápidamente?

   b) Si la nave viaja a e^8 metros por segundo, ¿con qué rapidez decrecerá la temperatura si se mueve en la dirección del inciso anterior?

8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo y $f : U \to \mathbb{R}$ una función derivable en cada $\overline{x} \in U$. Demuestre que si $\|\nabla f(\overline{x})\| \leq M$ para toda $\overline{x} \in U$, entonces $|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \leq M\|\overline{x} - \overline{y}\|$ para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in U$ (es decir, f es una función Lipschitz en U).

9. Halle el plano tangente en el punto indicado a las superficies determinadas por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$ en $(1, 2, \frac{1}{3})$.

   b) $xe^z + yz = 1$ en $(1, 1, 0)$.

   c) $z = \cos(x)\operatorname{sen}(y)$ en $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$.

10. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función que está expresada en términos de las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) de cada punto $\overline{x} \in U$. Suponga que $\overline{x}_0$ tiene coordenadas cilíndricas (ρ_0, θ_0, z_0).

    a) Defina $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ en el punto $\overline{x}_0$.

    b) Exprese a cada una de las derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ en el punto $\overline{x}_0$ en términos de las derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ en el punto $\overline{x}_0$, y viceversa.
    Sugerencia: Siga el proceso realizado en la Ayudantía 28.

11. Sean $F_1, \ldots, F_n : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que F_i es de clase C^1 para $i = 1, \ldots, n$ y suponga que existe $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = F_i(\overline{x})$ para toda $\overline{x} \in U$ $(i = 1, \ldots, n)$. Pruebe que $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x}) = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(\overline{x})$ para toda $\overline{x} \in U$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Pruebe que $\dfrac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{x})$ existe para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ y dé una expresión para estas derivadas parciales en términos de f y g.

Sección 3

13. Use el polinomio de Taylor de grado dos de las funciones adecuadas para calcular los siguientes límites:

    a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

    b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

14. Sea $\overline{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto crítico de una función f de clase C^2 en una vecindad de $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\overline{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\overline{x}_0) < 0$$

    para algunas $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. Pruebe que $\overline{x}_0$ es un punto silla de f.

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$. Pruebe que:

    a) f sólo tiene dos puntos críticos.

    b) Ambos puntos críticos son máximos locales.

    c) ¿Se puede presentar una situación análoga para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? Pruebe su respuesta.

16. Una compañía planea fabricar cajas rectangulares cerradas con un volumen de 8 litros. El material para la base y la tapa cuesta el doble que el que se usa para los lados. Encuentre las dimensiones para las cuales el costo es mínimo. Si utiliza multiplicadores de Lagrange indique por qué cree que en el vector que halló se alcanza el valor mínimo.

17. Escriba el número 120 como suma de tres números no negativos, de modo que la suma de sus productos, tomados dos a dos, sea máxima. Justifique su respuesta usando multiplicadores de Lagrange.

18. Sean $a_1, \ldots, a_k$ números positivos. Use multiplicadores de Lagrange para probar que

$$(a_1 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}.$$