Última actualización: 2 de febrero de 2023

Clase 02

En esta sesión comenzaremos a formalizar los conceptos discutidos la sesión anterior.

Particiones, Supremos e Ínfimos

Definición 1 *Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $P \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que P es una* ***partición de*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *si P es un subconjunto finito de $[a,b]$ y $a,b \in P$.*

Observación 2 *Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y P una partición de $[a,b]$. Por definición de partición, P es un conjunto finito, por lo que existe un número natural n de tal manera que*

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\},$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

A partir de este momento, cada que consideremos una partición de un intervalo $[a,b]$, la supondremos como en la observación anterior.

Denotaremos con $\mathscr{P}_{[a,b]}$ al conjunto de todas las particiones del intervalo cerrado $[a,b]$. De esta manera, escribiremos $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ en lugar de escribir P *es una partición del intervalo* $[a,b]$.

Ejemplo 3 *Considere el intervalo cerrado $[0,1]$ y los siguientes conjuntos*

(1) $P = \{0,1\}$

(2) $Q = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(3) $R = \left\{0, \dfrac{1}{10}, \dfrac{2}{10}, ..., \dfrac{9}{10}, 1\right\}$

Indique si P, Q o R son particiones de $[0,1]$.

Solución.

(1) Claramente P es un subconjunto finito de $[0,1]$ y $0,1 \in P$. Por lo tanto $P \in \mathscr{P}_{[0,1]}$.
En general, para un intervalo $[a,b]$, llamaremos **la partición trivial de** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ a la partición que sólo tiene como elementos a a y b. De esta manera, $\mathscr{P}_{[a,b]} \neq \varnothing$ para cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

(2) Se tiene que $0,1 \in Q$, pero aunque Q es un subconjunto de $[0,1]$, no es finito. Por lo tanto Q NO es una partición de $[a,b]$.

(3) $0,1 \in R$ y R es un subconjunto de $[0,1]$ con 11 elementos, así que $R \in \mathscr{P}_{[0,1]}$.
Note que en este caso la distancia entre cualesquiera dos elementos consecutivos de R es la misma, de hecho es $1/10$. Esto se puede hacer en general, es decir, si $[a,b]$ es un intervalo cerrado, podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$P_n = \left\{ a + \frac{i(b-a)}{n} \;\middle|\; i \in \{0,1,...,n\} \right\}.$$

Note que P_n es un conjunto finito con exactamente $n+1$ elementos y que

$$a = a + \frac{0(b-a)}{n} < a + \frac{1(b-a)}{n} < \cdots < a + \frac{n(b-a)}{n} = b.$$

Así, $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e induce n intervalos. A este tipo de particiones las llamaremos **particiones homogéneas.**
Observe que, en este ejemplo, $R = P_{10}$.

■

Según lo comentado la sesión anterior, necesitabamos definir de manera formal las bases de los rectángulos que utilizamos para aproximar el área bajo la gráfica de una función, pero notamos que las bases están determinadas por puntos en el intervalo dominio de la función, razón por la que hemos definido las particiones, vea figura 1.

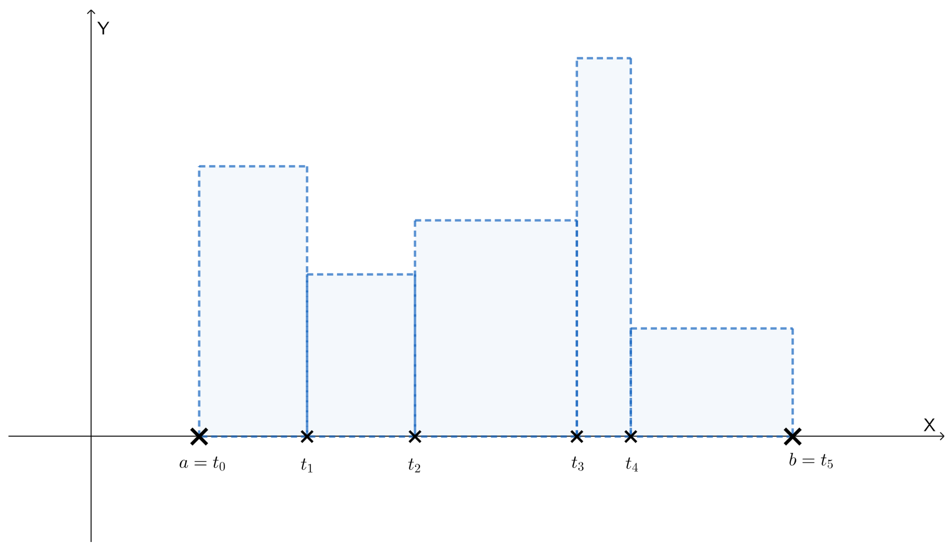


Figura 1: Las bases de los rectángulos de la imagen están determinadas por los elementos de la partición $P = \{a = t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 = b\}$.

Definición 4 *Sean $[a,b]$ un intervalo cerrado y $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Diremos que Q es un refinamiento de P, o que Q refina a P, si $P \subseteq Q$.*

Ejemplo 5 *Sea $P = \{0, 1/3, 2/3, 1\} \in \mathscr{P}_{[0,1]}$. Indique si los conjuntos $R = \{0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1\}$ y $Q = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ son refinamientos de P.*

Solución. Es claro que

$$P = \{\mathbf{0}, \mathbf{1/3}, \mathbf{2/3}, \mathbf{1}\} \subseteq \{\mathbf{0}, 1/6, \mathbf{1/3}, 1/2, \mathbf{2/3}, 5/6, \mathbf{1}\} = R,$$

por lo que R es un refinamiento de P. Por otro lado,

$$P = \{\mathbf{0}, \mathbf{1/3}, \mathbf{2/3}, \mathbf{1}\} \nsubseteq \{\mathbf{0}, 1/4, 1/2, 3/4, \mathbf{1}\} = Q,$$

por lo que Q NO es un refinamiento de P.

Podemos notar algo más en este ejemplo, $P = P_3$, $Q = P_4$ y $R = P_6$, lo que muestra que, en general, no es cierto que $P_n \subseteq P_m$ cuando $n < m$. ¿Qué condición se puede pedir a los números naturales n y m para que $P_n \subseteq P_m$?

Ahora, aunque Q no refina a P, podemos construir una partición que refine a P y que contenga a Q, a saber $P \cup Q$:

$$P = \{\mathbf{0}, \mathbf{1/3}, \mathbf{2/3}, \mathbf{1}\} \subseteq \{\mathbf{0}, 1/4, \mathbf{1/3}, 1/2, \mathbf{2/3}, 3/4, \mathbf{1}\} = P \cup Q.$$

De hecho este proceso funciona en general, es decir, si $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ cualesquiera, entonces $P \cup Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y refina tanto a P como a Q. ■

Antes de continuar, recordemos algunas definiciones y resultados vistos en nuestros cursos de Cálculo I: Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo (respectivamente ínfimo) de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si satisface las siguientes condiciones:

(1) $a \leq \alpha$ (respectivamente $a \geq \alpha$) para toda $a \in A$, es decir, α es cota superior (respectivamente inferior) de A.

(2) Si β es una cota superior (respectivamente inferior) de A, entonces $\alpha \leq \beta$ (respectivamente $\alpha \geq \beta$).

Dado que, de existir, tanto el supremo como el ínfimo son únicos, denotamos por $\mathbf{sup A}$ e $\mathbf{ínf A}$ al supremo e ínfimo de A respectivamente.
También debemos recordar el **Axioma del Supremo**:
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es un conjunto no vacío y acotado superiormente, entonces existe $\sup A$.

Y que utilizando el axioma del supremo se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 6 (Teorema del Ínfimo) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, entonces existe* $\operatorname{ínf} A$.

Ahora si podemos continuar.

Con los siguientes ejemplos queremos "preparar el terreno" para mostrar cómo el supremo y el ínfimo de un conjunto nos ayudarán a definir de manera formal las alturas de los rectángulos que utilizaremos para aproximar el área bajo la gráfica de una función definida en un intervalo cerrado.

Ejemplo 7 *Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente regla de correspondencia*

$$f(x) = (x - 1)^2 - 1.$$

Muestre que existen $\operatorname{ínf}\{f(x) \mid x \in [0, 2]\}$ *y* $\sup\{f(x) \mid x \in [0, 2]\}$ *y hállelos.*

Solución. Llamemos A al conjunto $\{f(x) \mid x \in [0, 2]\}$, es decir

$$A = \{f(x) \mid x \in [0, 2]\}.$$

Entonces debemos demostrar que existen tanto el ínfimo como el supremo de A y hallarlos. Pero antes, es importante observar que el conjunto A es un subconjunto de la imagen bajo f de $\mathbb{R}$ ($A \subseteq f(\mathbb{R})$) por lo que, de existir, el ínfimo y el supremo de A son números en el codominio de f y posiblemente no tengan nada que ver con el intervalo $[0, 2]$.

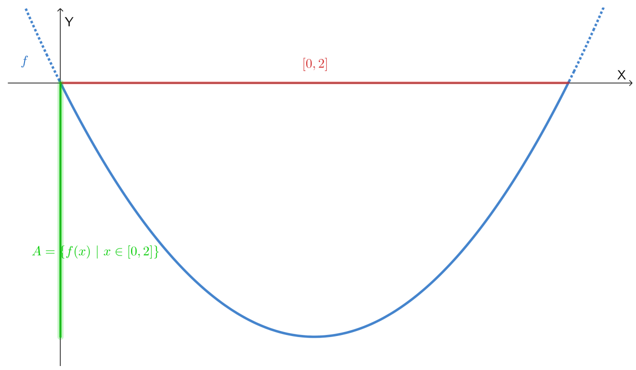


Figura 2: El conjunto A es un subconjunto del codominio de f mientras que el conjunto $[0,2]$ es un subconjunto del dominio de f.

De nuestros cursos de Cálculo I sabemos que una función continua g sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su valor máximo, digamos M, y su valor mínimo, digamos m, y por el Teorema del Valor Intermedio, que $\{g(x) \mid x \in [a,b]\} = [m,M]$. En nuestro caso, el valor mínimo de f en $[0,2]$ es $-1 = f(1)$ y el valor máximo de f en $[0,2]$ es $0 = f(0) = f(2)$, (vea figura 2) por lo que $A = [-1,0]$. Luego, A es no vacío y acotado tanto superior como inferiormente, así que, por el Teorema del Ínfimo y el Axioma del Supremo, tenemos que existen tanto $\text{ínf}\, A$ como $\sup A$. Finalmente, basta recordar que $\text{ínf}[a,b] = a$ y $\sup[a,b] = b$, de donde $\text{ínf}\, A = -1$ y $\sup A = 0$. ∎

Ejemplo 8 *Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cualesquiera $x, y \in [a,b]$ que cumplen que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$, es decir, una función no decreciente. Muestre que existen*

$$\sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

y

$$\text{ínf}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

y hállelos.

Solución. Claramente $\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \neq \varnothing$, por ejemplo $f(a) \in \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Además, como f es no decreciente, se tiene que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Se sigue que $f(a)$ es una cota inferior, y $f(b)$ una cota superior, para el conjunto $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Luego, por el Teorema del Ínfimo y el Axioma del Supremo, existen $\text{ínf}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ y $\sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

Afirmamos que $f(a) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ y $f(b) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Para demostrar esta afirmación solo resta ver que si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una cota inferior y $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, entonces $\alpha \leq f(a)$ y $f(b) \leq \beta$. Pero si α y β son cota inferior y superior respectivamente, entonces

$$\alpha \leq f(x) \qquad \text{y} \qquad f(y) \leq \beta$$

para cualesquiera $x, y \in [a,b]$, en particular ocurre para $x = a$ y $y = b$. Así, tenemos que $\alpha \leq f(a)$ y $f(b) \leq \beta$. ∎

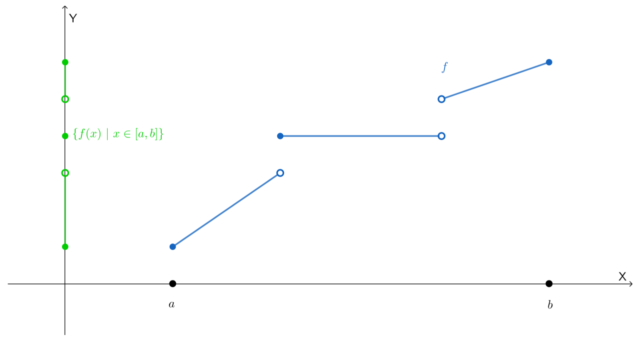


Figura 3: Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no decreciente, el conjunto $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ no necesariamente es un intervalo.

Observación 9 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$. Note que el conjunto $A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ es no vacío, por ejemplo $f(a) \in A$. Ahora, por ser f una función acotada en $[a,b]$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que*

$$-K \leq f(x) \leq K,$$

para toda $x \in [a,b]$, es decir, A es un conjunto acotado tanto superior como inferiormente. Así, por el Axioma del Supremo y el Teorema del Ínfimo, existen $M = \sup(A)$ y $m = \text{ínf}(A)$.

Además se cumple que

$$\beta \leq m \leq f(x) \leq M \leq \alpha,$$

para todo $x \in [a,b]$ y para cualesquiera β cota inferior de A y α cota superior de A.

Una interpretación geométrica de la observación anterior es que la región (la banda) que determinan las rectas $y = m$ y $y = M$ es la más angosta que contiene a todos los puntos de la gráfica de f, vea figura 4.

Note que la existencia de m y M nos permiten determinar la *altura* de un par de rectańgulos, que tienen como base el intervalo $[a,b]$; uno de ellos está contenido en la región que determina la gráfica de f mientras que el otro contiene a la región que determina la gráfica de f, vea figura 5

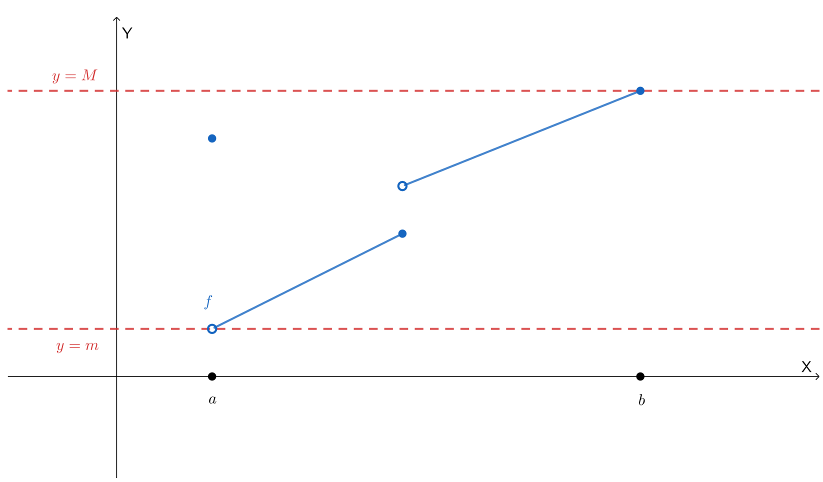
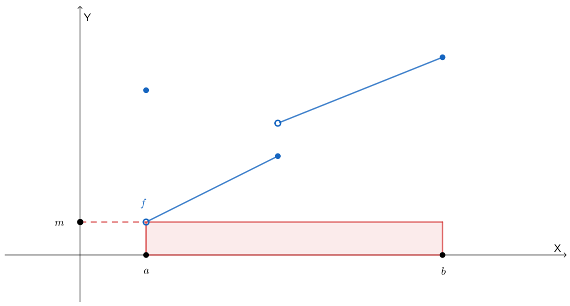
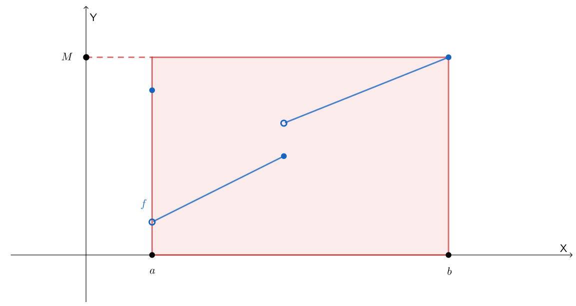


Figura 4: la "banda" que determinan las rectas $y = m$ y $y = M$ es la más angosta que contiene a todos los puntos de la gráfica de f.



(a) El número m determina la altura de un rectángulo que queda contenido en la región que determina la gráfica de f.



(b) El número M determina la altura de un rectángulo que contiene la región que determina la gráfica de f.

Figura 5

¿Vieron que ya "definimos" una(s) buena(s) altura(s) para los rectángulos que nos interesan? Pero, no olvidemos que lo que realmente nos interesa es la suma de las áreas de los rectángulos. Por supuesto que esto lo haremos a través de los conceptos que acabamos de introducir (particiones, supremos e ínfimos).

Definición 10 *Sean* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ *y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada. Para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *sean*

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \qquad y \qquad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definimos la ***la suma inferior de f respecto a P***, *denotada por* $\underline{S}(f,P)$, *como*

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

y ***la suma superior de f respecto a P***, *denotada por* $\overline{S}(f,P)$, *como*

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

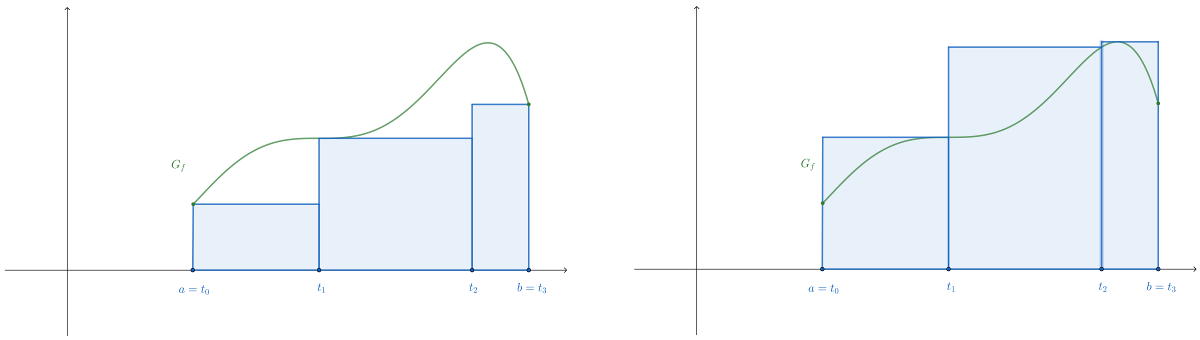
vea figura 6.

En la definición anterior se pide que f sea acotada en $[a,b]$ para garantizar la existencia tanto del ínfimo como del supremo de cada uno de los conjuntos $\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, como vimos en la Observación 9.

Observación 11 *Sean* $[a,b]$ *un intervalo y* $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. *Por definición de* m_i *y* M_i, *se tiene que* $m_i \leq M_i$ *y de aquí que*

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P).$$

Ejemplo 12 *Sea* $c \in \mathbb{R}$ *fijo. Considere la función* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = c$ *y* $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. *Halle* $\underline{S}(f,P)$ *y* $\overline{S}(f,P)$.



(a) $\underline{S}(f, P)$ se puede interpretar como el área de los rectángulos por "debajo" de la gráfica de f.

(b) $\overline{S}(f, P)$ se puede interpretar como el área de los rectángulos por "encima" de la gráfica de f.

Figura 6

Solución. Supongamos que $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \{c\}.$$

De donde $m_i = c$ y $M_i = c$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto,

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a)$$

y

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$

■

Ejemplo 13 *Considere la función* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

y $P \in \mathscr{P}_{[0,1]}$. *Halle* $\underline{S}(f, P)$ *y* $\overline{S}(f, P)$.

Solución. Supongamos que $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Recordemos, de Cálculo I, que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $q, r \in (a, b)$. Así, para cada $i \in \{1, ...n\}$, tenemos que existen $q_i \in \mathbb{Q}$ y $r_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $q_i, r_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Note que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $f(q_i) = 1$ y $f(r_i) = 0$. Se sigue que

$$\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \{0, 1\}.$$

Luego, $m_i = 0$ y $M_i = 1$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto,

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0(t_i - t_{i-1}) = 0$$

y

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(t_i - t_{i-1}) = 1.$$

■

Es importante recalcar que en los dos ejemplos anteriores las particiones utilizadas son arbitrarias, no tienen nada en particular.