Clase 03

Para facilitar la lectura de este documento, iniciamos recordando algunas cosas vistas en la sesión pasada, la definición de suma inferior y suma superior:

Definición 1 *Sean* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*,* $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ *y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada. Para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *sean*

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \qquad y \qquad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

*Definimos la **la suma inferior de f respecto a P**, denotada por* $\underline{S}(f,P)$*, como*

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

*y **la suma superior de f respecto a P**, denotada por* $\overline{S}(f,P)$*, como*

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Además de la siguiente observación:

Observación 2 *Sean* $[a,b]$ *un intervalo y* $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$*. Por definición de* m_i *y* M_i*, se tiene que* $m_i \le M_i$ *y de aquí que*

$$\underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P).$$

Sumas Superiores, Inferiores y Funciones Integrables

Lema 3 *Sean* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada y* $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ *tales que* Q *es un refinamiento de* P*. Entonces*

$$\underline{S}(f,P) \le \underline{S}(f,Q) \qquad y \qquad \overline{S}(f,Q) \le \overline{S}(f,P).$$

Demostración. Mostraremos únicamente la desigualdad entre las sumas inferiores, pues la otra es totalmente simétrica, y haremos la demostración usando inducción matemática sobre el cardinal del conjunto $Q \setminus P$.
Comencemos con nuestra base de inducción, para ello supongamos que $Q, P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tales que Q refina a P y que el cardinal de $Q \setminus P$ es exactamente 1, es decir, $|Q \setminus P| = 1$. Entonces, podemos suponer que

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_{k-1}, t_k, ..., t_n\} \quad \text{y} \quad Q = \{t_0, t_1, ..., t_{k-1}, l, t_k, ..., t_n\}.$$

Luego, tenemos que

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Por otro lado, si definimos

$$m' = \text{ínf}\,\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, l]\} \quad \text{ y } \quad m'' = \text{ínf}\,\{f(x) \mid x \in [l, t_k]\},$$

se tiene que

$$m_k \leq m', m'',$$

pues $\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, l]\}, \{f(x) \mid x \in [l, t_k]\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, t_k]\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - l) + m_k(l - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m''(t_k - l) + m'(l - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \underline{S}(f, Q).
\end{aligned}$$

Es decir, si Q refina a P y solo difieren en un punto, se cumple que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q).$$

Ahora, supongamos que para cualesquiera $R, T \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tales que T refina a R y $|T \setminus R| = m$, se tiene que

$$\underline{S}(f, R) \leq \underline{S}(f, T).$$

Luego, sean $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tales que Q refina a P y $|Q \setminus P| = m+1$. Entonces podemos suponer que $Q \setminus P = \{l_1, ..., l_m, l_{m+1}\}$. Consideremos la partición del intervalo $[a, b]$, P', definida como sigue

$$P' = P \cup \{l_1, ..., l_m\}.$$

Note que Q refina a P' y que $|Q \setminus P'| = 1$, así que, por la base de inducción, se tiene que

$$\underline{S}(f, P') \leq \underline{S}(f, Q).$$

Por otro lado, P' refina a P y $|P' \setminus P| = m$, así que, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P').$$

Se sigue que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P') \leq \underline{S}(f, Q).$$

■

Como consecuencia del Lema 3 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4 *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Entonces*

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q).$$

Demostración. Sea T la partición del intervalo $[a,b]$ definida como

$$T = P \cup Q.$$

Note que T refina tanto a P como a Q, así que por el Lema 3 y la Observación 2, tenemos que

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,T) \leq \overline{S}(f,T) \leq \overline{S}(f,Q).$$

$\blacksquare$

Recordemos que dado un intervalo $[a,b]$ siempre podemos considerar la partición trivial $\{a,b\}$, por lo que $\mathscr{P}_{[a,b]} \neq \varnothing$. De esto se sigue que, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada,

$$\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\} \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad \left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\} \neq \varnothing.$$

Ahora, utilizando la partición trivial del intervalo $[a,b]$ y el Teorema 4 tenemos que el conjunto $\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ es acotado superiormente por $\overline{S}(f,\{a,b\})$ y el conjunto $\left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ es acotado inferiormente por $\underline{S}(f,\{a,b\})$. Así, por el Axioma del supremo y el Teorema del Ínfimo, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 5 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos* ***la integral inferior de f en $[a,b]$****, denotada por* $\underline{\int_a^b} f$*, como*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$$

y ***la integral superior de f en $[a,b]$****, denotada por* $\overline{\int_a^b} f$*, como*

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}.$$

Observación 6 *Como vimos antes, para una función acotada en un intervalo cerrado, la integral inferior y la integral superior siempre existen, más aún, por el Teorema 4, tenemos que*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Ejemplo 7 *Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo. Considere la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$. Halle* $\underline{\int_a^b} f$ *y* $\overline{\int_a^b} f$*.*

Solución. Note que la función en cuestión es la misma que la del Ejemplo 12 de la Clase 02, por lo que

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\} = \sup\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

y

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\} = \text{ínf}\{c(b-a)\} = c(b-a).$$

En este caso, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a).$$

$\blacksquare$

Ejemplo 8 *Considere la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Halle $\underline{\int_0^1} f$ y $\overline{\int_0^1} f$.

Solución. La función de este ejemplo es la misma que la del Ejemplo 13 de la Clase 02, por lo que

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[0,1]}\right\} = \sup\{0\} = 0$$

y

$$\overline{\int_0^1} f = \inf\left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[0,1]}\right\} = \inf\{1\} = 1.$$

En este caso, se tiene que

$$\underline{\int_0^1} f < \overline{\int_0^1} f.$$

$\blacksquare$

Como muestran los ejemplos anteriores, hay funciones tales que la integral inferior es menor a la integral superior y otras donde se cumple la igualdad. A estas últimas, donde se cumple la igualdad, las destacamos en la siguiente definición.

Definición 9 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que* ***f es integrable sobre [a, b]*** *si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En este caso, a este número común lo llamaremos ***la integral de f sobre [a, b]*** *y lo denotaremos por*

$$\int_a^b f \qquad \text{o bien por} \qquad \int_a^b f(x)\ dx.$$

Es preciso aclarar que en la segunda notación, la letra x no tiene un significado especial, bien podemos escribir $\int_a^b f(t)\ dt$ o $\int_a^b f(\alpha)\ d\alpha$. Respecto al símbolo dx esperaremos un poco más para dar una interpretación de este.

Como primer ejemplo de una función integrable tenemos a la función del Ejemplo 7, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ (que claramente es acotada), más aún

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

Y como ejemplo de una función no integrable (aunque también acotada) tenemos a la función del Ejemplo 8, pues

$$\underline{\int_0^1} f < \overline{\int_0^1} f.$$