Última actualización: 16 de febrero de 2023

Clase 06

El siguiente teorema, visto la clase anterior, nos proporciona una gran cantidad de ejemplos de funciones integrables, a saber, todas las funciones continuas en un intervalo cerrado.

Teorema 1 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.*

Ahora, para esta sesión es necesario recordar el siguiente lema:

Lema 2 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se tiene que, $a = b$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, $|a - b| < \varepsilon$.*

En esta ocasión trabajaremos con algunas operaciones entre funciones que preservan la integrabilidad.

Aritmética de funciones integrables

Teorema 3 *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $c \in \mathbb{R}$. Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces:*

(1) La función $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(2) La función cf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

Demostración.

(1) Consideremos $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y sean

$m_i' = \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $m_i'' = \inf\{g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $m_i = \inf\{(f+g)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$,

$M_i' = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $M_i'' = \sup\{g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ y $M_i = \sup\{(f+g)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

Se tiene, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, que

$$m_i' + m_i'' \leq f(x) + g(x) = (f+g)(x) \quad \text{y} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq M_i' + M_i''.$$

Se sigue que $m_i' + m_i'' \leq m_i$ y $M_i \leq M_i' + M_i''$. Luego,

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P) + \underline{S}(g, P) &= \sum_{i=1}^n m_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i''(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(m_i' + m_i''\right)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \underline{S}(f+g, P)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f+g,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(M_i' + M_i''\right)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M_i''(t_i - t_{i-1}) \\
&= \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P).
\end{aligned}$$

Utilizaremos, una vez más, el Criterio de integrabilidad vía *épsilon* para demostrar que $f+g$ es integrable en $[a,b]$, así que sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son integrables en $[a,b]$, para $\varepsilon/2 > 0$ existen $Q, R \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tales que

$$\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \overline{S}(g,R) - \underline{S}(g,R) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si $P = Q \cup R$, entonces $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) < \frac{\varepsilon}{2},$$

pues P refina a Q y a R. Así,

$$\overline{S}(f+g,P) - \underline{S}(f+g,P) \leq \left[\overline{S}(f,P) - \underline{S}(g,P)\right] + \left[\overline{S}(g,P) - \underline{S}(f,P)\right] < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f+g$ es integrable en $[a,b]$. Ahora, para cualquier $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ se tiene que

$$\underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P)$$

y

$$\underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P) \leq \underline{S}(f+g,P) \leq \int_a^b (f+g) \leq \overline{S}(f+g,P) \leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P).$$

De esto último se sigue que

$$\left|\int_a^b (f+g) - \left[\int_a^b f + \int_a^b g\right]\right| \leq \left[\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right] + \left[\overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P)\right].$$

Y como vimos antes, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos hallar una partición P de tal manera que la suma del lado derecho sea menor que ε. Así, por el Lema 2, tenemos que

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(2) Si $c = 0$, entonces la función cf es la constante cero y ya hemos visto que las constantes son integrables, así que

$$\int_a^b (cf) = \int_a^b 0 = 0 = 0 \cdot \int_a^b f.$$

Supongamos ahora que $c > 0$ y consideremos $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Si para cada $i \in \{1, ..., n\}$, definimos

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\},$$
$$m_i' = \text{ínf}\{(cf)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \text{ y } M_i' = \sup\{(cf)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\},$$

entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} c \cdot m_i &= c \cdot \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ &= \text{ínf}\{c \cdot f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ &= \text{ínf}\{(cf)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ &= m_i'. \end{aligned}$$

(¿Por qué?) Y de manera análoga $cM_i = M_i'$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. De esta manera, tenemos que

$$\underline{S}(cf, P) = c\underline{S}(f, P) \quad \text{y} \quad \overline{S}(cf, P) = c\overline{S}(f, P).$$

Ahora, si consideramos $\varepsilon > 0$, como f es integrable en $[a, b]$, para el número $\varepsilon/c > 0$ existe $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \overline{S}(cf, P) - \underline{S}(cf, P) &= c\overline{S}(f, P) - c\underline{S}(f, P) \\ &= c\left[\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)\right] \\ &< c\left[\frac{\varepsilon}{c}\right] \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, cf es integrable en $[a, b]$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_a^b (cf) &= \underline{\int_a^b} (cf) \\ &= \sup\{\underline{S}(cf, P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \\ &= \sup\{c\underline{S}(f, P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \\ &= c \sup\{\underline{S}(f, P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \\ &= c \underline{\int_a^b} f \\ &= c \int_a^b f. \end{aligned}$$

El caso en que $c < 0$ se trata, con algunos cambios, de manera similar, por lo que lo dejamos como ejercicio.

■

Ejemplo 4 *Sea* $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por*

$$h(x) = 2 - x.$$

Muestre que h *es integrable en* $[a,b]$ *y halle el valor de* $\int_a^b h$.

Solución. Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2$ y $g(x) = x$. Note que $h = f - g$. Ahora, por el inciso (2) del teorema anterior tenemos que $-g = (-1)g$ es integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_a^b (-g) = -1 \int_a^b g,$$

es decir,

$$\int_a^b (-g) = (-1)\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = -\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right].$$

Luego, como f y $-g$ son integrables, entonces por el inciso (1) del teorema anterior, tenemos que $f + (-g) = f - g$ es integrable en $[a,b]$, es decir, h es integrable en $[a,b]$, y

$$\int_a^b h = \int_a^b (f + (-g)) = \int_a^b f + \int_a^b (-g) = 2(b-a) - \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right].$$

■

La información contenida en el ejemplo anterior puede resumirse como sigue

$$\int_a^b (2 - x)\ dx = 2(b-a) - \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right].$$

Hagamos ahora unos comentarios sobre la notación. Si escribimos $\int_a^b (2 - t)\ dt$ nos estamos refiriendo a la integral de la función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = 2 - t$, es decir, solo usamos otra letra para denotar la variable de la función h del ejercicio anterior. Así,

$$\int_a^b (2 - x)\ dx = \int_a^b (2 - t)\ dt = \int_a^b (2 - \alpha)\ d\alpha,$$

pues denotan al mismo número.

Ahora, respecto al símbolo dx, debemos comentar que se puede interpretar como un indicador de la variable que estamos integrando, por ejemplo

$$\int_a^b x\ dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

mientras que

$$\int_a^b x\ dt = x(b-a).$$

En la segunda integral la función que integramos es la función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = x$, es decir, la constante x.

Continuamos con el siguiente teorema.

Teorema 5 *Sean $m, M \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Si para cada $x \in [a, b]$ se cumple que*

$$m \leq f(x) \leq M,$$

entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demostración. Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Se tiene que

$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$, pues las mismas desigualdades se satisfacen para cada $x \in [a, b]$. Entonces, $m \leq m_i$ y $M_i \leq M$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, de donde

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \underline{S}(f, P) \leq \int_a^b f$$

y

$$\int_a^b f \leq \overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M(b-a).$$

■

Ejemplo 6 *Muestre que*

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\ dx \leq 2\sqrt{2}.$$

Solución. Consideremos la función $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ahora, como $x \in [1,2]$, se tiene que

$$1 \leq x^2 \leq 4 \quad \text{y} \quad \sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{5}$$

y de aquí que

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \leq 2\sqrt{2}.$$

Luego, como f es continua en $[1,2]$, por el Teorema 1, es integrable en $[1,2]$ y, por el Teorema 5, tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq 2\sqrt{2}.$$

$\blacksquare$