

Clase 08

En la clase anterior construimos funciones a partir de funciones integrables. Estas nuevas funciones resultaron ser continuas:

Teorema 1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a, b]$.

En esta sesión enunciaremos y demostraremos el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, en él se menciona qué condición debe satisfacer f para que F además de ser continua resulte una función derivable.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Lema 2 Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$. Si f es continua en c , entonces las funciones $m, M : [(a - c)/2, (b - c)/2] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$m(h) = \begin{cases} \inf\{f(x) \mid x \in [c, c + h]\} & \text{si } h \geq 0 \\ \inf\{f(x) \mid x \in [c + h, c]\} & \text{si } h \leq 0 \end{cases}$$

y

$$M(h) = \begin{cases} \sup\{f(x) \mid x \in [c, c + h]\} & \text{si } h \geq 0 \\ \sup\{f(x) \mid x \in [c + h, c]\} & \text{si } h \leq 0 \end{cases}$$

son continuas en 0, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} M(h).$$

Demostración. Debemos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $h \in [(a - c)/2, (b - c)/2]$ que cumpla que $|h| < \delta$ se tiene que

$$|m(h) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |M(h) - f(c)| < \varepsilon.$$

Entonces, sea $\varepsilon > 0$ fijo. Como f es continua en c , para el número $\varepsilon/2 > 0$, existe $\delta > 0$ de tal manera que si $x \in [a, b]$ y $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$.

Afirmamos que si $|h| < \delta$, entonces

$$|m(h) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |M(h) - f(c)| < \varepsilon.$$

Analicemos dos casos:

- (1) $0 \leq h < \delta$. En este caso tenemos, para cada $x \in [c, c + h]$, que $0 \leq x - c \leq h < \delta$, de donde $|x - c| < \delta$, así que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. De manera equivalente

$$f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $x \in [c, c + h]$. Ahora, por la primer desigualdad obtenemos que $f(c) - \varepsilon/2$ es cota inferior de $\{f(x) \mid x \in [c, c + h]\}$ y de la segunda desigualdad que $f(c) + \varepsilon/2$ es cota superior de $\{f(x) \mid x \in [c, c + h]\}$. Se sigue que

$$f(c) - \varepsilon < f(c) - \varepsilon/2 \leq m(h) \quad \text{y} \quad M(h) \leq f(c) + \varepsilon/2 < f(c) + \varepsilon.$$

Luego, como $m(h) \leq f(x) \leq M(h)$ para cada $x \in [c, c + h]$, se sigue que

$$|f(c) - m(h)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(c) - M(h)| < \varepsilon.$$

(2) $-\delta < h \leq 0$. Ahora tenemos, para cada $x \in [c + h, c]$, que $-\delta < h \leq x - c \leq 0$, de donde $|x - c| < \delta$, así que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Es decir,

$$f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De la primer desigualdad obtenemos que $f(c) - \varepsilon/2$ es cota inferior de $\{f(x) \mid x \in [c + h, c]\}$ y de la segunda desigualdad que $f(c) + \varepsilon/2$ es cota superior de $\{f(x) \mid x \in [c + h, c]\}$. Por lo que

$$f(c) - \varepsilon < f(c) - \varepsilon/2 \leq m(h) \quad \text{y} \quad M(h) \leq f(c) + \varepsilon/2 < f(c) + \varepsilon$$

y como $m(h) \leq f(x) \leq M(h)$ para cada $x \in [c + h, c]$, se tiene que

$$|f(c) - m(h)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(c) - M(h)| < \varepsilon.$$

De los dos casos concluimos que, si $|h| < \delta$, entonces

$$|f(c) - m(h)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(c) - M(h)| < \varepsilon.$$

■

Vale la pena notar que modificando las definiciones de m y M cuando f es continua en $c = a$ y en $c = b$ y siguiendo los casos (1) y (2) se puede demostrar que m y M son continuas en 0. Es decir, el resultado anterior vale aún cuando $c = a$ o $c = b$.

Teorema 3 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $[a, b]$ y para cada $x \in [a, b]$ se tiene que

$$F'(x) = f(x).$$

Demostración. Debemos demostrar que para cada $c \in [a, b]$ existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c + h) - F(c)}{h}.$$

Para ello, analicemos la expresión $\frac{F(c + h) - F(c)}{h}$:

(1) Si $h > 0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Luego, si definimos m_h y M_h como

$$m_h = \inf\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\} \quad \text{y} \quad M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\},$$

por el Teorema 5 de la Clase 06, tenemos que

$$m_h h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h h.$$

Es decir,

$$m_h h \leq F(c+h) - F(c) \leq M_h h.$$

Así que

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

(2) Ahora, si $h < 0$, tenemos que

$$F(c+h) - F(c) = - \int_{c+h}^c f.$$

En este caso, si definimos m_h y M_h como

$$m_h = \inf\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\} \quad \text{y} \quad M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\},$$

también por el Teorema 5 de la Clase 06, tenemos que

$$m_h(-h) \leq \int_{c+h}^c f \leq M_h(-h),$$

luego, multiplicando por (-1)

$$m_h h \geq - \int_{c+h}^c f \geq M_h h.$$

Es decir,

$$m_h h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h h.$$

Ahora, como $h < 0$,

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Note que en cualquier caso

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Así, por el Lema 2,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Note que esta demostración vale para $c \in (a, b)$, pero de los casos (1) y (2) se siguen los casos cuando $c = a$ y $c = b$, respectivamente. ■