Última actualización: 23 de febrero de 2023

Clase 10

Para esta sesión conviene tener a la vista el Primer Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema 1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $[a,b]$ y para cada $x \in [a,b]$ se tiene que

$$F'(x) = f(x).$$

En esta clase enunciaremos y demostraremos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Para la demostración del siguiente resultado, que es consecuencia del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, debemos recordar un resultado de nuestros cursos de Cálculo I:
Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $[a,b]$. Si $f'(x) = g'(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in [a,b]$

$$f(x) = g(x) + c.$$

Corolario 2 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Si exite una función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a,b]$ tal que $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Consideremos la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Por el Teorema 1, F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Se sigue que $F'(x) = g'(x)$ para cada $x \in [a,b]$, así que, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = g(x) + c$$

para todo $x \in [a,b]$. En particular, para $x = a$ y $x = b$, tenemos que

$$0 = F(a) = g(a) + c \quad \text{y} \quad \int_a^b f = F(b) = g(b) + c.$$

De lo anterior, tenemos que $c = -g(a)$ y que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

$\blacksquare$

Este corolario tiene una consecuencia muy practica, pues si conocemos una función derivable con derivada continua, entonces podemos calcular una integral, es decir, si $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a,b]$ y $g' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a).$$

Lo mejor de todo esto es que conocemos muchas funciones como estas.

Ejemplo 3 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Halle el valor de*

$$\int_a^b x^n \, dx.$$

Solución. Sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Note que g es derivable en $[a,b]$ y $g'(x) = x^n$ para cada $x \in [a,b]$, luego g' es continua en $[a,b]$. Así, por el Corolario 2, tenemos que

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a),$$

es decir,

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

$\blacksquare$

Note que este ejemplo nos proporciona, con muy poco esfuerzo, el valor de algunas integrales que ya habíamos calculado (usando sumas superiores o inferiores). Vaya que el Corolario 2 es útil ¿no?

Ejemplo 4 *Sean a, b tales que $ab > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Halle*

$$\int_a^b \frac{1}{x^n} \, dx.$$

Solución. Como $ab > 0$, entonces $a, b > 0$ o $a, b < 0$. Supongamos que $0 < a < b$ y consideremos la función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}}$. Se tiene que g es derivable en $[a,b]$ y $g'(x) = \dfrac{1}{x^n}$ para cada $x \in [a,b]$. Ahora, note primero que la función g' es acotada en $[a,b]$ (razón por la cual el ejercicio pide $ab > 0$, pues si sucediera que $0 \in [a, b]$ la función g' ni siquiera estaría definida en 0 y aunque la definieramos no sería acotada, menos integrable), más aún, g' es continua en $[a, b]$. Así, por el Corolario 2, tenemos que

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a),$$

es decir,

$$\int_a^b \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{1}{(1-n)b^{n-1}} - \frac{1}{(1-n)a^{n-1}}.$$

■

Una de las hipótesis del Corolario 2 es que f sea continua, justo para aplicar el Teorema 1, pero para escribir $\int_a^b f$ solo basta con que f sea integrable, una hipótesis más débil. De hecho, es posible sustituir esta hipótesis en el Corolario 2 y obtener la misma conclusión, pero en este caso no es posible usar el Teorema 1.

Teorema 5 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Si existe una función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$ tal que $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene, por el Teorema del Valor Medio aplicado a g en $[t_{i-1}, t_i]$, que existe $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = g'(x_i).$$

Ahora, como $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $g'(x_i) = f(x_i)$, así que

$$\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f(x_i),$$

de donde

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = f(x_i)\left(t_i - t_{i-1}\right).$$

Ahora, si consideramos m_i y M_i definidos como

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad \text{y} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\},$$

entonces

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

es decir,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Luego,

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})\leq \sum_{i=1}^{n}(g(t_i)-g(t_{i-1}))\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})=\overline{S}(f,P).$$

Pero,

$$\sum_{i=1}^{n}(g(t_i)-g(t_{i-1}))=g(b)-g(a),$$

así que

$$\underline{S}(f,P)\leq g(b)-g(a)\leq \overline{S}(f,P).$$

Como lo anterior vale para cualquier $P\in\mathscr{P}_{[a,b]}$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f\leq g(b)-g(a)\leq \overline{\int_a^b} f.$$

Finalmente, como f es integrable, $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f$, de donde

$$\int_a^b f=g(b)-g(a).$$

■